102. Distancia de la Tierra al Sol Se deduce de la **Tercera Ley de Kepler** del movimiento planetario, que el promedio de distancia de un planeta al Sol (en metros) es

$$d = \left(\frac{GM}{4\pi^2}\right)^{1/3} T^{2/3}$$

donde $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg es la masa del Sol, $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$ es la constante gravitacional, y T es el período de la órbita del planeta (en segundos). Use el dato de que el período de la órbita de la Tierra es de alrededor de 365.25 días para hallar la distancia de la Tierra al Sol.

DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

103. ¿Cuánto es mil millones? Si usted tuviera un millón (10^6) de dólares en una maleta, y gastara mil dólares (10^3) al día, ¿cuántos años tardaría en gastarse todo el dinero? Gastando al mismo paso, ¿cuántos años tardaría en vaciar la maleta llena con *mil millones* (10^9) de dólares?

104. Potencias fáciles que se ven difíciles Calcule mentalmente estas expresiones. Use la ley de exponentes como ayuda.

(a) $\dfrac{18^5}{9^5}$ **(b)** $20^6 \cdot (0.5)^6$

105. Límite del comportamiento de potencias Complete las tablas siguientes. ¿Qué ocurre a la n raíz de 2 cuando n se hace grande? ¿Qué se puede decir acerca de la n raíz de $\frac{1}{2}$?

n	$2^{1/n}$
1	
2	
5	
10	
100	

n	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$
1	
2	
5	
10	
100	

Construya una tabla similar para $n^{1/n}$. ¿Qué ocurre a la n raíz de n cuando n se hace grande?

106. Comparación de raíces Sin usar calculadora, determine cuál número es más grande en cada par.

(a) $2^{1/2}$ o $2^{1/3}$ **(b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$ o $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$

(c) $7^{1/4}$ o $4^{1/3}$ **(d)** $\sqrt[3]{5}$ o $\sqrt{3}$

1.3 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Suma y resta de polinomios ▶ Multiplicación de expresiones algebraicas ▶ Fórmulas de productos notables ▶ Factorización de factores comunes ▶ Factorización de trinomios ▶ Fórmulas especiales de factorización ▶ Factorización por agrupación de términos

Una **variable** es una letra que puede representar cualquier número tomado de un conjunto de números dado. Si empezamos con variables, por ejemplo x, y y z, y algunos números reales, y las combinamos usando suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces, obtenemos una **expresión algebraica.** Veamos a continuación algunos ejemplos:

$$2x^2 - 3x + 4 \qquad \sqrt{x} + 10 \qquad \frac{y - 2z}{y^2 + 4}$$

Un **monomio** es una expresión de la forma ax^k, donde a es un número real y k es un entero no negativo. Un **binomio** es una suma de dos monomios y un **trinomio** es una suma de tres monomios. En general, una suma de monomios se llama *polinomio*. Por ejemplo, la primera expresión citada líneas antes es un polinomio, pero las otras dos no lo son.

POLINOMIOS

Un **polinomio** en la variable x es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales, y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, entonces el polinomio tiene **grado n**. Los monomios $a_k x^k$ que conforman el polinomio reciben el nombre de **términos** del polinomio.

Observe que el grado de un polinomio es la potencia más alta de la variable que aparece en el polinomio.

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
$2x^2 - 3x + 4$	trinomio	$2x^2, -3x, 4$	2
$x^8 + 5x$	binomio	$x^8, 5x$	8
$3 - x + x^2 - \frac{1}{2}x^3$	cuatro términos	$-\frac{1}{2}x^3, x^2, -x, 3$	3
$5x + 1$	binomio	$5x, 1$	1
$9x^5$	monomial	$9x^5$	5
6	monomial	6	0

Suma y resta de polinomios

Propiedad Distributiva

$ac + bc = (a + b)c$

Sumamos y **restamos** polinomios usando las propiedades de números reales que vimos en la Sección 1.1. La idea es combinar **términos semejantes** (esto es, términos con las mismas variables elevados a las mismas potencias) usando la Propiedad Distributiva. Por ejemplo,

$$5x^7 + 3x^7 = (5 + 3)x^7 = 8x^7$$

Para restar polinomios, tenemos que recordar que si un signo menos precede a una expresión en paréntesis, entonces se cambia el signo de cada término dentro del paréntesis cuando quitemos el paréntesis:

$$-(b + c) = -b - c$$

[Éste es simplemente el caso de la Propiedad Distributiva, $a(b + c) = ab + ac$, con $a = -1$.]

EJEMPLO 1 | Suma y resta de polinomios

(a) Encuentre la suma $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$.

(b) Encuentre la diferencia $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$.

SOLUCIÓN

(a) $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$

$= (x^3 + x^3) + (-6x^2 + 5x^2) + (2x - 7x) + 4$ — Agrupe términos semejantes

$= 2x^3 - x^2 - 5x + 4$ — Combine términos semejantes

(b) $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$

$= x^3 - 6x^2 + 2x + 4 - x^3 - 5x^2 + 7x$ — Propiedad Distributiva

$= (x^3 - x^3) + (-6x^2 - 5x^2) + (2x + 7x) + 4$ — Agrupe términos semejantes

$= -11x^2 + 9x + 4$ — Combine términos semejantes

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **15** Y **17**

Multiplicación de expresiones algebraicas

Para hallar el **producto** de polinomios o de otras expresiones algebraicas, es necesario usar repetidamente la Propiedad Distributiva. En particular, usándola tres veces en el producto de dos binomios, obtenemos

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Esto dice que multiplicamos los dos factores al multiplicar cada término de un factor por cada término del otro factor y sumamos estos productos. Esquemáticamente, tenemos

$$(a + b)(c + d) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{F}}}{ac} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{O}}}{ad} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{I}}}{bc} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L}}}{bd}$$

El acrónimo **FOIL** nos ayuda a recordar que el producto de dos binomios es la suma de los productos de los primeros (***F****irst*) términos, los términos externos (***O****uter*), los términos internos (***I****nner*) y los últimos (***L****ast*).

En general, podemos multiplicar dos expresiones algebraicas usando para ello la Propiedad Distributiva y las Leyes de Exponentes.

EJEMPLO 2 | Multiplicación de binomios usando FOIL

$$(2x + 1)(3x - 5) = \underset{\text{F}}{6x^2} - \underset{\text{O}}{10x} + \underset{\text{I}}{3x} - \underset{\text{L}}{5} \qquad \text{Propiedad Distributiva}$$

$$= 6x^2 - 7x - 5 \qquad \text{Combine términos semejantes}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

Cuando multiplicamos trinomios u otros polinomios con más términos, usamos la Propiedad Distributiva. También es útil acomodar nuestro trabajo en forma de tabla. El siguiente ejemplo ilustra ambos métodos.

EJEMPLO 3 | Multiplicación de polinomios

Encuentre el producto: $(2x + 3)(x^2 - 5x + 4)$

SOLUCIÓN 1: Usando la Propiedad Distributiva

$$\begin{aligned}(2x + 3)(x^2 - 5x + 4) &= 2x(x^2 - 5x + 4) + 3(x^2 - 5x + 4) && \text{Propiedad Distributiva}\\ &= (2x \cdot x^2 - 2x \cdot 5x + 2x \cdot 4) + (3 \cdot x^2 - 3 \cdot 5x + 3 \cdot 4) && \text{Propiedad Distributiva}\\ &= (2x^3 - 10x^2 + 8x) + (3x^2 - 15x + 12) && \text{Leyes de Exponentes}\\ &= 2x^3 - 7x^2 - 7x + 12 && \text{Combine términos semejantes}\end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2: Usando forma de tabla

$$\begin{array}{rrrrl} & x^2 & -\ 5x & +\ 4 & \\ & & 2x & +\ 3 & \\ \hline & 3x^2 & -\ 15x & +\ 12 & \text{Multiplique } x^2 - 5x + 4 \text{ por } 3\\ 2x^3 & -\ 10x^2 & +\ 8x & & \text{Multiplique } x^2 - 5x + 4 \text{ por } 2x\\ \hline 2x^3 & -\ 7x^2 & -\ 7x & +\ 12 & \text{Sume términos}\end{array}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**

▼ Fórmulas de productos notables

Ciertos tipos de productos se presentan con tanta frecuencia que es necesario aprenderlos. Se pueden verificar las siguientes fórmulas al ejecutar las multiplicaciones.

Vea en el *Proyecto de descubrimiento,* citado en la página 34, una interpretación geométrica de algunas de estas fórmulas.

FÓRMULAS DE PRODUCTOS NOTABLES

Si A y B son números reales cualesquiera o expresiones algebraicas, entonces

1. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ — Suma y producto de términos iguales

2. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ — Cuadrado de una suma

3. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ — Cuadrado de una diferencia

4. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ — Cubo de una suma

5. $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$ — Cubo de una diferencia

La idea clave en el uso de estas fórmulas (o cualquier otra fórmula en álgebra) es el **Principio de Sustitución**: podemos sustituir cualquier expresión algebraica por cualquier letra en una fórmula. Por ejemplo, para hallar $(x^2 + y^3)^2$ usamos la Fórmula 2 de Productos, sustituyendo x^2 por A y y^3 por B, para obtener

$$(x^2 + y^3)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(y^3) + (y^3)^2$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

EJEMPLO 4 | Uso de las fórmulas de productos notables

Use las fórmulas de productos notables para hallar cada producto.

(a) $(3x + 5)^2$ **(b)** $(x^2 - 2)^3$

SOLUCIÓN

(a) Sustituyendo $A = 3x$ y $B = 5$ en la Fórmula 2 de Productos, obtenemos:

$$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5) + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

(b) Sustituyendo $A = x^2$ y $B = 2$ en la Fórmula 5 de Productos, obtenemos:

$$\begin{aligned}(x^2 - 2)^3 &= (x^2)^3 - 3(x^2)^2(2) + 3(x^2)(2)^2 - 2^3 \\ &= x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **29** Y **41**

EJEMPLO 5 | Uso de las fórmulas de productos notales

Encuentre cada producto.

(a) $(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y})$ **(b)** $(x + y - 1)(x + y + 1)$

SOLUCIÓN

(a) Sustituyendo $A = 2x$ y $B = \sqrt{y}$ en la Fórmula 1 de Productos, obtenemos:

$$(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y}) = (2x)^2 - (\sqrt{y})^2 = 4x^2 - y$$

(b) Si agrupamos $x + y$ y la vemos como una expresión algebraica, podemos usar la Fórmula 1 de Productos con $A = x$ y $B = 1$.

$$\begin{aligned}(x + y - 1)(x + y + 1) &= [(x + y) - 1][(x + y) + 1] \\ &= (x + y)^2 - 1^2 && \text{Fórmula de Producto 1} \\ &= x^2 + 2xy + y^2 - 1 && \text{Fórmula de Producto 2}\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **55** Y **59**

Factorización de factores comunes

Usamos la Propiedad Distributiva para expandir expresiones algebraicas. A veces necesitamos invertir este proceso (de nuevo usando la Propiedad Distributiva) al **factorizar** una expresión como un producto de otras más sencillas. Por ejemplo, podemos escribir

FACTORIZACIÓN →

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

← EXPANSIÓN

Decimos que $x - 2$ y $x + 2$ son **factores** de $x^2 - 4$.

El tipo más sencillo de factorización se presenta cuando los términos tienen un factor común.

EJEMPLO 6 | Factorización de factores comunes

Factorice lo siguiente.

(a) $3x^2 - 6x$ **(b)** $8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4$

(c) $(2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3)$

SOLUCIÓN

(a) El máximo factor común en los términos $3x^2$ y $-6x$ es $3x$, de modo que tenemos

$$3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

La multiplicación da

$3x(x - 2) = 3x^2 - 6x$ ✔

(b) Observamos que

8, 6 y -2 tienen el máximo factor común 2

x^4, y^3 y x tienen el máximo factor común x

y^2, y^3 y y^4 tienen el máximo factor común y^2

Por tanto, el máximo factor común de los tres términos del polinomio es $2xy^2$, y tenemos

$$\begin{aligned} 8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 &= (2xy^2)(4x^3) + (2xy^2)(3x^2y) + (2xy^2)(-y^2 \\ &= 2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2) \end{aligned}$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

La multiplicación da

$2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2)$

$= 8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4$ ✔

(c) Los dos términos tienen el factor común $x - 3$.

$$\begin{aligned} (2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3) &= [(2x + 4) - 5](x - 3) && \text{Propiedad Distributiva} \\ &= (2x - 1)(x - 3) && \text{Simplifique} \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **61, 63** Y **65**

Factorización de trinomios

Para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, observamos que

$$(x + r)(x + s) = x^2 + (r + s)x + rs$$

por lo que necesitamos escoger números r y s tales que $r + s = b$ y $rs = c$.

EJEMPLO 7 | Factorizar $x^2 + bx + c$ por ensayo y error.

Factorice: $x^2 + 7x + 12$

SOLUCIÓN Necesitamos hallar dos enteros cuyo producto sea 12 y cuya suma sea 7. Por ensayo y error encontramos que los dos enteros son 3 y 4. Entonces, la factorización es

$$x^2 + 7x + 12 = (x + \underbrace{3)(x + 4}_{\text{factores de 12}})$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

La multiplicación da

$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$ ✔

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **67**

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$, buscamos factores de la forma $px + r$ y $qx + s$:

$$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s) = pqx^2 + (ps + qr)x + rs$$

factores de a

$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s)$

factores de c

Por tanto, tratamos de hallar números p, q, r y s tales que $pq = a$ y $rs = c$, $ps + qr = b$. Si estos números son enteros todos ellos, entonces tendremos un número limitado de posibilidades de intentar conseguir p, q, r y s.

EJEMPLO 8 | Factorización de $ax^2 + bx + c$ por ensayo y error

Factorice: $6x^2 + 7x - 5$

SOLUCIÓN Podemos factorizar 6 como $6 \cdot 1$ o $3 \cdot 2$ y -5 como $-5 \cdot 1$ o $5 \cdot (-1)$. Al tratar estas posibilidades, llegamos a la factorización

factores de 6

$$6x^2 + 7x - 5 = (3x + 5)(2x - 1)$$

factores de -5

VERIFIQUE SU RESPUESTA

La multiplicación da

$(3x + 5)(2x - 1) = 6x^2 + 7x - 5$ ✔

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

EJEMPLO 9 | Reconocer la forma de una expresión

Factorice lo siguiente.

(a) $x^2 - 2x - 3$ **(b)** $(5a + 1)^2 - 2(5a + 1) - 3$

SOLUCIÓN

(a) $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ Ensayo y error

(b) Esta expresión es de la forma

$$\square^2 - 2\square - 3$$

donde $\square$ representa $5a + 1$. Ésta es la misma forma que la expresión de la parte (a), de modo que se factoriza como $(\square - 3)(\square + 1)$.

$$\begin{aligned}(5a + 1)^2 - 2(5a + 1) - 3 &= [(5a + 1) - 3][(5a + 1) + 1] \\ &= (5a - 2)(5a + 2)\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **71**

Fórmulas especiales de factorización

Algunas expresiones algebraicas notables se pueden factorizar usando las fórmulas que siguen. Las tres primeras son simplemente Fórmulas de Productos Notables escritas a la inversa.

FÓRMULAS ESPECIALES DE FACTORIZACIÓN

Fórmula	Nombre
1. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$	Diferencia de cuadrados
2. $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$	Cuadrado perfecto
3. $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$	Cuadrado perfecto
4. $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$	Diferencia de cubos
5. $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$	Suma de cubos

EJEMPLO 10 | Factorización de diferencias de cuadrados

Factorice lo siguiente.

(a) $4x^2 - 25$ **(b)** $(x + y)^2 - z^2$

SOLUCIÓN

(a) Usando la fórmula de Diferencia de Cuadrados con $A = 2x$ y $B = 5$, tenemos

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5)(2x + 5)$$

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

(b) Usamos la fórmula de Diferencia de Cuadrados con $A = x + y$ y $B = z$.

$$(x + y)^2 - z^2 = (x + y - z)(x + y + z)$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **75** Y **109**

EJEMPLO 11 | Factorización de diferencias y sumas de cubos

Factorice cada polinomio.

(a) $27x^3 - 1$ **(b)** $x^6 + 8$

SOLUCIÓN

(a) Usando la fórmula de la Diferencia de Cubos con $A = 3x$ y $B = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} 27x^3 - 1 &= (3x)^3 - 1^3 = (3x - 1)[(3x)^2 + (3x)(1) + 1^2] \\ &= (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) \end{aligned}$$

(b) Usando la fórmula de Suma de Cubos con $A = x^2$ y $B = 2$, tenemos

$$x^6 + 8 = (x^2)^3 + 2^3 = (x^2 + 2)(x^4 - 2x^2 + 4)$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **77** Y **79**

Un trinomio es un cuadrado perfecto si es de la forma

$$A^2 + 2AB + B^2 \qquad \text{o} \qquad A^2 - 2AB + B^2$$

Por lo tanto, **reconocemos un cuadrado perfecto** si el término medio ($2AB$ o $-2AB$) es más o menos dos veces el producto de las raíces cuadradas de los dos términos externos.

EJEMPLO 12 | Reconocer cuadrados perfectos

Factorice cada trinomio.

(a) $x^2 + 6x + 9$ **(b)** $4x^2 - 4xy + y^2$

SOLUCIÓN

(a) Aquí $A = x$ y $B = 3$, de modo que $2AB = 2 \cdot x \cdot 3 = 6x$. Como el término medio es $6x$, el trinomio es un cuadrado perfecto. Por la fórmula del Cuadrado Perfecto tenemos

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

(b) Aquí $A = 2x$ y $B = y$, de modo que $2AB = 2 \cdot 2x \cdot y = 4xy$. Como el término medio es $-4xy$, el trinomio es un cuadrado perfecto. Por la fórmula del Cuadrado Perfecto tenemos

$$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **105** Y **107**

Cuando factorizamos una expresión, a veces el resultado puede factorizarse aún más. En general, *primero factorizamos factores comunes* y luego inspeccionamos el resultado para ver si puede ser factorizado por cualquiera de los otros métodos de esta sección. Repetimos este proceso hasta que hayamos factorizado completamente la expresión.

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

Cambio de palabras, sonido e imágenes en números

Imágenes, sonido y texto se transmiten rutinariamente de un lugar a otro por la Internet, aparatos de fax o módem. ¿Cómo pueden estas cosas transmitirse por cables telefónicos? La clave para hacer esto es cambiarlas en números o bits (los dígitos 0 o 1). Es fácil ver cómo cambiar texto a números. Por ejemplo, podríamos usar la correspondencia A = 00000001, B = 00000010, C = 00000011, D = 00000100, E = 00000101, y así sucesivamente. La palabra "BED" (CAMA) se convierte entonces en 000000100000010100000100. Al leer los dígitos en grupos de ocho, es posible transformar este número de nuevo a la palabra "BED".

Cambiar sonidos a bits es más complicado. Una onda de sonido puede ser graficada en un osciloscopio o en computadora. La gráfica se descompone a continuación matemáticamente en componentes más sencillos correspondientes a las diferentes frecuencias del sonido original. (Aquí se usa una rama de las matemáticas de nombre Análisis de Fourier.) La intensidad de cada componente es un número, y el sonido original puede reconstruirse a partir de estos números. Por ejemplo, se almacena música en un CD como una sucesión de bits; puede verse como 101010001010010100101010 1000001011110101000101011. . . . (Un segundo de música requiere 1.5 millones de bits). El reproductor de CD reconstruye la música a partir de los números presentes en el CD.

Cambiar imágenes a números comprende expresar el color y brillantez de cada punto (o píxel) en un número. Esto se hace en forma muy eficiente usando una rama de las matemáticas llamada teoría ondulatoria. El FBI emplea trenes de ondas como forma compacta de almacenar en archivo millones de huellas dactilares que necesitan.

EJEMPLO 13 | Factorizar por completo una expresión

Factorice por completo cada expresión.

(a) $2x^4 - 8x^2$ **(b)** $x^5y^2 - xy^6$

SOLUCIÓN

(a) Primero factorizamos la potencia de x que tenga el exponente más pequeño.

$$\begin{aligned} 2x^4 - 8x^2 &= 2x^2(x^2 - 4) && \text{El factor común es } 2x^2 \\ &= 2x^2(x-2)(x+2) && \text{Factorice } x^2 - 4 \text{ como una diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

(b) Primero factorizamos las potencias de x y de y que tengan los exponentes más pequeños.

$$\begin{aligned} x^5y^2 - xy^6 &= xy^2(x^4 - y^4) && \text{El factor común es } xy^2 \\ &= xy^2(x^2+y^2)(x^2-y^2) && \text{Factorice } x^4 - y^4 \text{ como una diferencia de cuadrados} \\ &= xy^2(x^2+y^2)(x+y)(x-y) && \text{Factorice } x^2 - y^2 \text{ como una diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **115** Y **117**

En el siguiente ejemplo factorizamos variables con exponentes fraccionarios. Este tipo de factorización se presenta en cálculo.

EJEMPLO 14 | Factorizar expresiones con exponentes fraccionarios

Factorice lo siguiente.

(a) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ **(b)** $(2+x)^{-2/3}x + (2+x)^{1/3}$

SOLUCIÓN

(a) Factorice la potencia de x que tenga el *exponente más pequeño*, es decir, $x^{-1/2}$.

$$\begin{aligned} 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2} &= 3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2) && \text{Factorice } 3x^{-1/2} \\ &= 3x^{-1/2}(x-1)(x-2) && \text{Factorice la ecuación de segundo grado } x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

Para factorizar $x^{-1/2}$ de $x^{3/2}$, *restamos* exponentes:

$$\begin{aligned} x^{3/2} &= x^{-1/2}(x^{3/2-(-1/2)}) \\ &= x^{-1/2}(x^{3/2+1/2}) \\ &= x^{-1/2}(x^2) \end{aligned}$$

(b) Factorice la potencia de $2 + x$ que tenga el *exponente más pequeño*, es decir, $(2+x)^{-2/3}$

$$\begin{aligned} (2+x)^{-2/3}x + (2+x)^{1/3} &= (2+x)^{-2/3}[x + (2+x)] && \text{Factorice } (2+x)^{-2/3} \\ &= (2+x)^{-2/3}(2+2x) && \text{Simplifique} \\ &= 2(2+x)^{-2/3}(1+x) && \text{Factorice 2} \end{aligned}$$

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

Para ver que haya factorizado correctamente, multiplique usando las Leyes de Exponentes.

(a) $3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2)$
$= 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ ✔

(b) $(2+x)^{-2/3}[x + (2+x)]$
$= (2+x)^{-2/3}x + (2+x)^{1/3}$ ✔

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **91** Y **93**

Factorización por agrupación de términos

Los polinomios con al menos cuatro términos pueden factorizarse a veces por agrupación de términos. El siguiente ejemplo ilustra la idea.

EJEMPLO 15 | Factorización por agrupación

Factorice lo siguiente.

(a) $x^3 + x^2 + 4x + 4$ **(b)** $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$

SOLUCIÓN

(a) $x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x^3 + x^2) + (4x + 4)$ Agrupe términos

$= x^2(x + 1) + 4(x + 1)$ Factorice factores comunes

$= (x^2 + 4)(x + 1)$ Factorice $x + 1$ de cada término

(b) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = (x^3 - 2x^2) - (3x - 6)$ Agrupe términos

$= x^2(x - 2) - 3(x - 2)$ Factorice factores comunes

$= (x^2 - 3)(x - 2)$ Factorice $x - 2$ de cada término

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **83**

1.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Considere el polinomio $2x^5 + 6x^4 + 4x^3$.

¿Cuántos términos tiene este polinomio? _____

Enliste los términos:______

¿Cuál factor es común a cada término?_____

Factorice el polinomio: $2x^5 + 6x^4 + 4x^3 =$ _____.

2. Para factorizar el trinomio $x^2 + 7x + 10$, buscamos dos enteros cuyo producto sea____ y cuya suma sea____.

Estos enteros son ___ y ___, de modo que el trinomio se factoriza como_____.

3. La fórmula de productos notables para la “suma de un cuadrado” es $(A + B)^2 =$ ______.

Por tanto, $(2x + 3)^2 =$ ______.

4. La fórmula de productos notables para la “suma y diferencia de los mismos términos” es $(A + B)(A - B) =$ _________.

Entonces $(5 + x)(5 - x) =$ __________.

5. La fórmula de factorización especial para “la diferencia de cuadrados” es $A^2 - B^2 =$ ______. Entonces, $4x^2 - 25$ se factoriza como _______.

6. La fórmula de factorización especial para un “cuadrado perfecto” es $A^2 + 2AB + B^2 =$ ______. Entonces $x^2 + 10x + 25$ se factoriza como _________.

HABILIDADES

7-12 ■ Complete la tabla siguiente diciendo si el polinomio es un monomio, binomio o trinomio; a continuación, haga una lista de sus términos y exprese su grado.

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
7. $x^2 - 3x + 7$			
8. $2x^5 + 4x^2$			

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
9. -8			
10. $\frac{1}{2}x^7$			
11. $x - x^2 + x^3 - x^4$			
12. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}$			

13-22 ■ Encuentre la suma, diferencia o producto.

13. $(12x - 7) - (5x - 12)$

14. $(5 - 3x) + (2x - 8)$

15. $(3x^2 + x + 1) + (2x^2 - 3x - 5)$

16. $(3x^2 + x + 1) - (2x^2 - 3x - 5)$

17. $(x^3 + 6x^2 - 4x + 7) - (3x^2 + 2x - 4)$

18. $3(x - 1) + 4(x + 2)$

19. $8(2x + 5) - 7(x - 9)$

20. $4(x^2 - 3x + 5) - 3(x^2 - 2x + 1)$

21. $2(2 - 5t) + t^2(t - 1) - (t^4 - 1)$

22. $5(3t - 4) - (t^2 + 2) - 2t(t - 3)$

23-28 ■ Multiplique las expresiones algebraicas usando el método FOIL y simplifique.

23. $(3t - 2)(7t - 4)$

24. $(4s - 1)(2s + 5)$

25. $(3x + 5)(2x - 1)$

26. $(7y - 3)(2y - 1)$

27. $(x + 3y)(2x - y)$

28. $(4x - 5y)(3x - y)$

29-44 ■ Multiplique las expresiones algebraicas usando una fórmula de producto notable y simplifique.

29. $(3x + 4)^2$

30. $(1 - 2y)^2$

31. $(2u + v)^2$

32. $(x - 3y)^2$

33. $(2x + 3y)^2$

34. $(r - 2s)^2$

35. $(x + 5)(x - 5)$

36. $(y - 3)(y + 3)$

37. $(3x - 4)(3x + 4)$

38. $(2y + 5)(2y - 5)$

39. $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)$

40. $(\sqrt{y} + \sqrt{2})(\sqrt{y} - \sqrt{2})$

41. $(y + 2)^3$ **42.** $(x - 3)^3$

43. $(1 - 2r)^3$ **44.** $(3 + 2y)^3$

45-60 ■ Ejecute las operaciones indicadas y simplifique.

45. $(x + 2)(x^2 + 2x + 3)$ **46.** $(x + 1)(2x^2 - x + 1)$

47. $(2x - 5)(x^2 - x + 1)$ **48.** $(1 + 2x)(x^2 - 3x + 1)$

49. $\sqrt{x}(x - \sqrt{x})$ **50.** $x^{3/2}(\sqrt{x} - 1/\sqrt{x})$

51. $y^{1/3}(y^{2/3} + y^{5/3})$ **52.** $x^{1/4}(2x^{3/4} - x^{1/4})$

53. $(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$ **54.** $(x^{1/2} + y^{1/2})(x^{1/2} - y^{1/2})$

55. $(\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b)$

56. $(\sqrt{h^2 + 1} + 1)(\sqrt{h^2 + 1} - 1)$

57. $((x - 1) + x^2)((x - 1) - x^2)$

58. $(x + (2 + x^2))(x - (2 + x^2))$

59. $(2x + y - 3)(2x + y + 3)$ **60.** $(x + y + z)(x - y - z)$

61-66 ■ Factorice el factor común.

61. $-2x^3 + 16x$ **62.** $2x^4 + 4x^3 - 14x^2$

63. $y(y - 6) + 9(y - 6)$ **64.** $(z + 2)^2 - 5(z + 2)$

65. $2x^2y - 6xy^2 + 3xy$ **66.** $-7x^4y^2 + 14xy^3 + 21xy^4$

67-74 ■ Factorice el trinomio.

67. $x^2 + 2x - 3$ **68.** $x^2 - 6x + 5$

69. $8x^2 - 14x - 15$ **70.** $6y^2 + 11y - 21$

71. $3x^2 - 16x + 5$ **72.** $5x^2 - 7x - 6$

73. $(3x + 2)^2 + 8(3x + 2) + 12$

74. $2(a + b)^2 + 5(a + b) - 3$

75-82 ■ Use una fórmula de factorización especial para factorizar la expresión.

75. $9a^2 - 16$ **76.** $(x + 3)^2 - 4$

77. $27x^3 + y^3$ **78.** $a^3 - b^6$

79. $8s^3 - 125t^3$ **80.** $1 + 1000y^3$

81. $x^2 + 12x + 36$ **82.** $16z^2 - 24z + 9$

83-88 ■ Factorice la expresión agrupando términos.

83. $x^3 + 4x^2 + x + 4$ **84.** $3x^3 - x^2 + 6x - 2$

85. $2x^3 + x^2 - 6x - 3$ **86.** $-9x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

87. $x^3 + x^2 + x + 1$ **88.** $x^5 + x^4 + x + 1$

89-94 ■ Factorice por completo la expresión. Empiece por factorizar la potencia más baja de cada factor común.

89. $x^{5/2} - x^{1/2}$ **90.** $3x^{-1/2} + 4x^{1/2} + x^{3/2}$

91. $x^{-3/2} + 2x^{-1/2} + x^{1/2}$ **92.** $(x - 1)^{7/2} - (x - 1)^{3/2}$

93. $(x^2 + 1)^{1/2} + 2(x^2 + 1)^{-1/2}$

94. $x^{-1/2}(x + 1)^{1/2} + x^{1/2}(x + 1)^{-1/2}$

95-124 ■ Factorice por completo la expresión.

95. $12x^3 + 18x$ **96.** $30x^3 + 15x^4$

97. $x^2 - 2x - 8$ **98.** $x^2 - 14x + 48$

99. $2x^2 + 5x + 3$ **100.** $2x^2 + 7x - 4$

101. $9x^2 - 36x - 45$ **102.** $8x^2 + 10x + 3$

103. $49 - 4y^2$ **104.** $4t^2 - 9s^2$

105. $t^2 - 6t + 9$ **106.** $x^2 + 10x + 25$

107. $4x^2 + 4xy + y^2$ **108.** $r^2 - 6rs + 9s^2$

109. $(a + b)^2 - (a - b)^2$ **110.** $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$

111. $x^2(x^2 - 1) - 9(x^2 - 1)$ **112.** $(a^2 - 1)b^2 - 4(a^2 - 1)$

113. $8x^3 - 125$ **114.** $x^6 + 64$

115. $x^3 + 2x^2 + x$ **116.** $3x^3 - 27x$

117. $x^4y^3 - x^2y^5$ **118.** $18y^3x^2 - 2xy^4$

119. $2x^3 + 4x^2 + x + 2$ **120.** $3x^3 + 5x^2 - 6x - 10$

121. $(x - 1)(x + 2)^2 - (x - 1)^2(x + 2)$

122. $y^4(y + 2)^3 + y^5(y + 2)^4$

123. $(a^2 + 1)^2 - 7(a^2 + 1) + 10$

124. $(a^2 + 2a)^2 - 2(a^2 + 2a) - 3$

125-128 ■ Factorice por completo la expresión. (Este tipo de expresión aparece en cálculo cuando se usa la “Regla del Producto”.)

125. $5(x^2 + 4)^4(2x)(x - 2)^4 + (x^2 + 4)^5(4)(x - 2)^3$

126. $3(2x - 1)^2(2)(x + 3)^{1/2} + (2x - 1)^3(\frac{1}{2})(x + 3)^{-1/2}$

127. $(x^2 + 3)^{-1/3} - \frac{2}{3}x^2(x^2 + 3)^{-4/3}$

128. $\frac{1}{2}x^{-1/2}(3x + 4)^{1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2}(3x + 4)^{-1/2}$

129. **(a)** Demuestre que $ab = \frac{1}{2}[(a + b)^2 - (a^2 + b^2)]$.

(b) Demuestre que $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2$.

(c) Demuestre que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

(d) Factorice por completo: $4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$.

130. Verifique las fórmulas especiales de factorización 4 y 5 al expandir sus lados derechos.

APLICACIONES

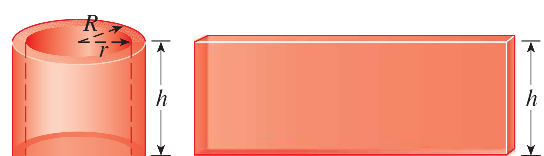
131. Volumen de concreto Se construye una alcantarilla con grandes capas cilíndricas vaciadas en concreto, como se muestra en la figura. Usando la fórmula para el volumen de un cilindro dada al final de este libro, explique por qué el volumen de la capa cilíndrica es

$$V = \pi R^2h - \pi r^2h$$

Factorice para demostrar que

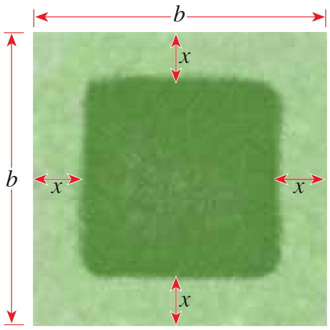
$$V = 2\pi \cdot \text{radio promedio} \cdot \text{altura} \cdot \text{grosor}$$

Use el diagrama “desenrollado” para explicar por qué esto tiene sentido geométricamente hablando.



132. Podar un campo Cada semana, un campo cuadrado de cierto parque estatal es podado alrededor de los bordes. El resto del campo se mantiene sin podar para que sirva como hábitat para aves y animales pequeños (vea la figura). El campo mide b pies por b pies, y la franja podada es de x pies de ancho.

(a) Explique por qué el área de la parte podada es $b^2 - (b - 2x)^2$.
(b) Factorice la expresión de la parte (a) para demostrar que el área de la parte podada también es $4x(b - x)$.



DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

133. Grados de sumas y productos de polinomios Forme varios pares de polinomios y, a continuación, calcule la suma y producto de cada par. Con base en sus experimentos y observaciones, conteste las siguientes preguntas.

(a) ¿Cómo está relacionado el grado del producto con los grados de los polinomios originales?
(b) ¿Cómo está relacionado el grado de la suma con los grados de los polinomios originales?

134. El poder de las fórmulas algebraicas Use la fórmula de una diferencia de cuadrados para factorizar $17^2 - 16^2$. Nótese que es fácil calcular mentalmente la forma factorizada pero no es tan fácil calcular la forma original en esta forma. Evalúe mentalmente cada expresión:

(a) $528^2 - 527^2$
(b) $122^2 - 120^2$
(c) $1020^2 - 1010^2$

A continuación, use la fórmula de productos notables

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

para evaluar mentalmente estos productos:

(d) $79 \cdot 51$
(e) $998 \cdot 1002$

135. Diferencias de potencias pares

(a) Factorice por completo las expresiones: $A^4 - B^4$ y $A^6 - B^6$.
(b) Verifique que $18{,}335 = 12^4 - 7^4$ y que $2{,}868{,}335 = 12^6 - 7^6$.
(c) Use los resultados de las partes (a) y (b) para factorizar los enteros 18,335 y 2,868,335. A continuación demuestre que en estas dos factorizaciones todos los factores son números primos.

136. Factorización de $A^n - 1$ Verifique estas fórmulas al expandir y simplificar el lado derecho.

$$A^2 - 1 = (A - 1)(A + 1)$$
$$A^3 - 1 = (A - 1)(A^2 + A + 1)$$
$$A^4 - 1 = (A - 1)(A^3 + A^2 + A + 1)$$

Con base en el patrón mostrado en esta lista, ¿cómo piensa usted que sería posible factorizar $A^5 - 1$? Verifique su conjetura. Ahora generalice el patrón que haya observado para obtener una fórmula de factorización para $A^n - 1$, donde n es un entero positivo.

137. Factorización de $x^4 + ax^2 + b$ A veces se puede factorizar con facilidad un trinomio de la forma $x^4 + ax^2 + b$. Por ejemplo,

$$x^4 + 3x^2 - 4 = (x^2 + 4)(x^2 - 1)$$

Pero $x^4 + 3x^2 + 4$ no se puede factorizar así. En cambio, podemos usar el siguiente método.

$$\begin{aligned}
x^4 + 3x^2 + 4 &= (x^4 + 4x^2 + 4) - x^2 && \text{Sume y reste } x^2\\
&= (x^2 + 2)^2 - x^2 && \text{Factorice el cuadrado perfecto}\\
&= [(x^2 + 2) - x][(x^2 + 2) + x] && \text{Diferencia de cuadrados}\\
&= (x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2)
\end{aligned}$$

Factorice lo siguiente, usando cualquier método apropiado.

(a) $x^4 + x^2 - 2$
(b) $x^4 + 2x^2 + 9$
(c) $x^4 + 4x^2 + 16$
(d) $x^4 + 2x^2 + 1$

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO **Visualización de una fórmula**

En este proyecto descubrimos interpretaciones geométricas de algunas fórmulas de productos notables. El lector puede hallar el proyecto en el sitio web del libro: **www.stewartmath.com**

1.4 Expresiones racionales

Dominio de una expresión algebraica ▶ Simplificación de expresiones racionales ▶ Multiplicación y división de expresiones racionales ▶ Suma y resta de expresiones racionales ▶ Fracciones compuestas ▶ Racionalización del denominador o el numerador ▶ Evitar errores comunes

El cociente de dos expresiones algebraicas se denomina **expresión fraccionaria.** A continuación veamos algunos ejemplos:

$$\frac{2x}{x-1} \qquad \frac{\sqrt{x}+3}{x+1} \qquad \frac{y-2}{y^2+4}$$

Una **expresión racional** es una expresión fraccionaria donde el numerador y el denominador son polinomios. Por ejemplo, las siguientes son expresiones racionales:

$$\frac{2x}{x-1} \qquad \frac{x}{x^2+1} \qquad \frac{x^3-x}{x^2-5x+6}$$

En esta sección aprendemos a ejecutar operaciones algebraicas de expresiones racionales.

▼ Dominio de una expresión algebraica

Expresión	Dominio
$\frac{1}{x}$	$\{x \mid x \neq 0\}$
$\sqrt{x}$	$\{x \mid x \geq 0\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\{x \mid x > 0\}$

En general, una expresión algebraica puede no estar definida para todos los valores de la variable. El **dominio** de una expresión algebraica es el conjunto de números reales que se permite tenga la variable. La tabla al margen de esta página da algunas expresiones básicas y sus dominios.

EJEMPLO 1 | Hallar el dominio de una expresión

Encuentre los dominios de las siguientes expresiones.

(a) $2x^2 + 3x - 1$ **(b)** $\frac{x}{x^2-5x+6}$ **(c)** $\frac{\sqrt{x}}{x-5}$

SOLUCIÓN

(a) Este polinomio está definido para toda x. Entonces, el dominio es el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales.

(b) Primero factorizamos el denominador.

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$$

El denominador sería 0 si $x = 2$ o $x = 3$

Como el denominador es cero cuando $x = 2$ o 3, la expresión no está definida para estos números. El dominio $\{x \mid x \neq 2 \text{ y } x \neq 3\}$.

(c) Para que el numerador esté definido, debemos tener $x \geq 0$. Tampoco podemos dividir entre 0, de modo que $x \neq 5$.

Asegúrese de tener $x \geq 0$ para tomar la raíz cuadrada

$$\frac{\sqrt{x}}{x-5}$$

El denominador sería 0 si $x = 5$

Entonces, el dominio es $\{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 5\}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11** ■

Simplificación de expresiones racionales

Para **simplificar expresiones racionales**, factorizamos el numerador y el denominador y usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$$

Esto nos permite **cancelar** factores comunes del numerador y el denominador.

EJEMPLO 2 | Simplificación de expresiones racionales por cancelación

Simplifique: $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$

SOLUCIÓN

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 2)} \quad \text{Factorice}$$

$$= \frac{x + 1}{x + 2} \quad \text{Cancele factores comunes}$$

No podemos cancelar las x^2 en $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$ porque x^2 no es un factor.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17** ■

Multiplicación y división de expresiones racionales

Para **multiplicar expresiones racionales,** usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

Esto dice que para multiplicar dos fracciones multiplicamos sus numeradores y multiplicamos sus denominadores.

EJEMPLO 3 | Multiplicación de expresiones racionales

Ejecute la multiplicación indicada y simplifique: $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \dfrac{3x + 12}{x - 1}$

SOLUCIÓN Primero factorizamos.

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \frac{3x + 12}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x + 4)^2} \cdot \frac{3(x + 4)}{x - 1} \quad \text{Factorice}$$

$$= \frac{3(x - 1)(x + 3)(x + 4)}{(x - 1)(x + 4)^2} \quad \text{Propiedad de fracciones}$$

$$= \frac{3(x + 3)}{x + 4} \quad \text{Cancele factores comunes}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25** ■

Para **dividir expresiones racionales**, usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

Esto dice que para dividir una fracción entre otra fracción, invertimos el divisor y multiplicamos.

EJEMPLO 4 | División de expresiones racionales

Ejecute la división indicada y simplifique:

$$\frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6} = \frac{x-4}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2-3x-4} \qquad \text{Invierta y multiplique}$$

$$= \frac{(x-4)(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+2)(x-4)(x+1)} \qquad \text{Factorice}$$

$$= \frac{x+3}{(x-2)(x+1)} \qquad \text{Cancele factores comunes}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31** ■

Suma y resta de expresiones racionales

Evite hacer el siguiente error:

$$\frac{A}{B+C} \cancel{=} \frac{A}{B} + \frac{A}{C}$$

Por ejemplo, si hacemos $A = 2$, $B = 1$ y $C = 1$, entonces vemos el error:

$$\frac{2}{1+1} \stackrel{?}{=} \frac{2}{1} + \frac{2}{1}$$

$$\frac{2}{2} \stackrel{?}{=} 2 + 2$$

$$1 \stackrel{?}{=} 4 \quad \text{Error!}$$

Para **sumar o restar expresiones racionales,** primero encontramos un denominador común y a continuación usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\boxed{\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}}$$

Aun cuando funcionará cualquier denominador común, es mejor usar el **mínimo común denominador** (MCD) como se explica en la Sección 1.1. El MCD se encuentra al factorizar cada denominador y tomar el producto de los distintos factores, usando la potencia superior que aparezca en cualquiera de los factores.

EJEMPLO 5 | Sumar y restar expresiones racionales

Ejecute las operaciones indicadas y simplifique:

(a) $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{x}{x+2}$ **(b)** $\dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$

SOLUCIÓN

(a) Aquí el MCD es simplemente el producto de $(x-1)(x+2)$.

$$\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+2} = \frac{3(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)} \qquad \text{Escriba fracciones usando el MCD}$$

$$= \frac{3x+6+x^2-x}{(x-1)(x+2)} \qquad \text{Sume fracciones}$$

$$= \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x+2)} \qquad \text{Combine los términos del numerador}$$

(b) El MCD de $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ y $(x+1)^2$ es $(x-1)(x+1)^2$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{(x+1)^2} &= \frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{(x+1)^2} && \text{Factorice}\\
&= \frac{(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} && \text{Combine fracciones usando el MCD}\\
&= \frac{x+1-2x+2}{(x-1)(x+1)^2} && \text{Propiedad Distributiva}\\
&= \frac{3-x}{(x-1)(x+1)^2} && \text{Combine los términos del numerador}
\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **43** Y **45**

Fracciones compuestas

Una **fracción compuesta** es una fracción en la que el numerador, el denominador, o ambos, son expresiones fraccionarias.

EJEMPLO 6 | Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{\dfrac{x}{y} + 1}{1 - \dfrac{y}{x}}$

SOLUCIÓN 1 Combinamos los términos del numerador en una sola fracción. Hacemos lo mismo con el denominador. A continuación invertimos y multiplicamos.

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{x}{y}+1}{1-\dfrac{y}{x}} &= \frac{\dfrac{x+y}{y}}{\dfrac{x-y}{x}} = \frac{x+y}{y}\cdot\frac{x}{x-y}\\
&= \frac{x(x+y)}{y(x-y)}
\end{aligned}$$

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

Cortesía de NASA

Códigos para corregir errores

Las imágenes enviadas por la nave *Pathfinder (Explorador)* desde la superficie de Marte el 4 de julio de 1997, eran asombrosamente claras. Pero pocas personas que vieron estas imágenes estaban conscientes de las complejas matemáticas utilizadas para lograr esta hazaña. La distancia a Marte es enorme, y el ruido de fondo (o estática) es muchas veces más fuerte que la señal original emitida por la nave espacial. Entonces, cuando los científicos reciben la señal, está llena de errores. Para obtener una imagen clara, los errores deben hallarse y corregirse. Este mismo problema de errores se encuentra en forma rutinaria en la transmisión de registros bancarios cuando una persona usa un cajero automático o de voz cuando habla por teléfono.

Para entender la forma en que los errores se localizan y corrigen, primero debemos entender que para transmitir imágenes o texto los transformamos en bits (los dígitos 0 o 1; vea página 30). Para ayudar al receptor a reconocer errores, el mensaje se "codifica" al insertar bits adicionales. Por ejemplo, suponga que usted desea transmitir el mensaje "10100". Un código muy sencillo es como sigue: envía cada dígito un millón de veces. La persona que recibe el mensaje lo lee en bloques de un millón de dígitos. Si el primer bloque es principalmente de números 1, concluye que es probable que usted esté tratando de transmitir un 1, y así sucesivamente. Decir que este código no es eficiente es un poco modesto; requiere enviar un millón de veces más datos que el mensaje original. Otro método inserta "dígitos de comprobación". Por ejemplo, cada bloque de ocho dígitos inserta un noveno dígito; el dígito insertado es 0 si hay un número par de números 1 en el bloque y 1 si hay un número impar. Por lo tanto, si un solo dígito está mal (un 0 cambiado a un 1, o viceversa), los dígitos de prueba nos permiten reconocer que ha ocurrido un error. Este método no nos dice dónde está el error, de modo que no podemos corregirlo. Los modernos códigos que corrigen errores usan interesantes algoritmos matemáticos que requieren insertar relativamente pocos dígitos pero permiten al receptor no sólo reconocer errores, sino también corregirlos. El primer código corrector de errores fue inventado en la década de 1940 por Richard Hamming en el MIT. Es interesante observar que el idioma inglés tiene un mecanismo corrector de errores ya integrado; para probarlo, trate de leer esta oración cargada de errores: Gve mo libty ox biv ne deth.

SOLUCIÓN 2 Encontramos el MCD de todas las fracciones en la expresión y, a continuación, lo multiplicamos por el numerador y denominador. En este ejemplo, el MCD de todas las fracciones es xy. Por lo tanto

$$\frac{\frac{x}{y}+1}{1-\frac{y}{x}} = \frac{\frac{x}{y}+1}{1-\frac{y}{x}} \cdot \frac{xy}{xy} \qquad \text{Multiplique numerador y denominador por } xy$$

$$= \frac{x^2+xy}{xy-y^2} \qquad \text{Simplifique}$$

$$= \frac{x(x+y)}{y(x-y)} \qquad \text{Factorice}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **59** Y **61**

Los siguientes dos ejemplos muestran situaciones en cálculo que requieren la capacidad para trabajar con expresiones fraccionarias.

EJEMPLO 7 | Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}$

SOLUCIÓN Empezamos por combinar las fracciones del numerador usando un denominador común.

$$\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} \qquad \text{Combine fracciones del numerador}$$

$$= \frac{a-(a+h)}{a(a+h)} \cdot \frac{1}{h} \qquad \text{Propiedad 2 de fracciones (invierta divisor y multiplicar)}$$

$$= \frac{a-a-h}{a(a+h)} \cdot \frac{1}{h} \qquad \text{Propiedad Distributiva}$$

$$= \frac{-h}{a(a+h)} \cdot \frac{1}{h} \qquad \text{Simplifique}$$

$$= \frac{-1}{a(a+h)} \qquad \text{Propiedad 5 de fracciones (cancele factores comunes)}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

EJEMPLO 8 | Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{(1+x^2)^{1/2}-x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2}$

SOLUCIÓN 1 Factorice $(1+x^2)^{-1/2}$ del numerador.

Factorice la potencia de $1+x^2$ con el exponente *más pequeño*, en este caso $(1+x^2)^{-1/2}$.

$$\frac{(1+x^2)^{1/2}-x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} = \frac{(1+x^2)^{-1/2}[(1+x^2)-x^2]}{1+x^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

SOLUCIÓN 2 Como $(1 + x^2)^{-1/2} = 1/(1 + x^2)^{1/2}$ es una fracción, podemos eliminar todas las fracciones al multiplicar numerador y denominador por $(1 + x^2)^{1/2}$.

$$\frac{(1 + x^2)^{1/2} - x^2(1 + x^2)^{-1/2}}{1 + x^2} = \frac{(1 + x^2)^{1/2} - x^2(1 + x^2)^{-1/2}}{1 + x^2} \cdot \frac{(1 + x^2)^{1/2}}{(1 + x^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{(1 + x^2) - x^2}{(1 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **77**

Racionalización del denominador o el numerador

Si una fracción tiene un denominador de la forma $A + B\sqrt{C}$, podemos racionalizar el denominador al multiplicar numerador y denominador por el **radical conjugado** $A - B\sqrt{C}$. Esto funciona bien, por la fórmula 1 de productos notables de la Sección 1.3, el producto del denominador y su radical conjugado no contienen radical:

$$(A + B\sqrt{C})(A - B\sqrt{C}) = A^2 - B^2C$$

EJEMPLO 9 | Racionalización del denominador

Racionalización del denominador: $\dfrac{1}{1 + \sqrt{2}}$

SOLUCIÓN Multiplicamos numerador y denominador por el radical conjugado de $1 + \sqrt{2}$, que es $1 - \sqrt{2}$.

La Fórmula 1 de Productos Notables es $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$$ Multiplique numerador y denominador por el radical conjugado

$$= \frac{1 - \sqrt{2}}{1^2 - (\sqrt{2})^2}$$ Fórmula 1 de productos notables

$$= \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2} - 1$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **81**

EJEMPLO 10 | Racionalización del numerador

Racionalice el numerador: $\dfrac{\sqrt{4 + h} - 2}{h}$

SOLUCIÓN Multiplicamos numerador y denominador por el radical conjugado $\sqrt{4 + h} + 2$.

La Fórmula 1 de Productos Notables es $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

$$\frac{\sqrt{4 + h} - 2}{h} = \frac{\sqrt{4 + h} - 2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4 + h} + 2}{\sqrt{4 + h} + 2}$$ Multiplique numerador y denominador por el radical conjugado

$$= \frac{(\sqrt{4 + h})^2 - 2^2}{h(\sqrt{4 + h} + 2)}$$ Fórmula 1 de Productos Notables

$$= \frac{4 + h - 4}{h(\sqrt{4 + h} + 2)}$$

$$= \frac{h}{h(\sqrt{4 + h} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{4 + h} + 2}$$ Propiedad 5 de fracciones (cancele factores comunes)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **87**

▼ Evitar errores comunes

No cometa el error de aplicar propiedades de la multiplicación a la operación de adición. Muchos de los errores comunes en álgebra son por esta razón. La tabla siguiente indica varias propiedades de la multiplicación e ilustra el error al aplicarlas a la adición.

Propiedad correcta de multiplicación	Error común con la adición
$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$	$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$
$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad (a, b \geq 0)$	$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b \quad (a, b \geq 0)$	$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$
$\dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a \cdot b}$	$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \neq \dfrac{1}{a + b}$
$\dfrac{ab}{a} = b$	$\dfrac{a + b}{a} \neq b$
$a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$	$a^{-1} + b^{-1} \neq (a + b)^{-1}$

Para verificar que las ecuaciones de la columna derecha están en error, simplemente sustituya los números a y b y calcule cada lado. Por ejemplo, si tomamos $a = 2$ y $b = 2$ en el cuarto error, encontramos que el lado izquierdo es

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

mientras que el lado derecho es

$$\frac{1}{a + b} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

Como $1 \neq \frac{1}{4}$, la ecuación indicada está en error. Del mismo modo, el lector debe convencerse del error en cada una de las otras ecuaciones. (Vea Ejercicio 105.)

1.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. De lo siguiente, ¿cuáles son expresiones racionales?

(a) $\dfrac{3x}{x^2 - 1}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt{x + 1}}{2x + 3}$ **(c)** $\dfrac{x(x^2 - 1)}{x + 3}$

2. Para simplificar una expresión racional, cancelamos *factores* que son comunes al ______ y ______. Por tanto, la expresión

$$\frac{(x + 1)(x + 2)}{(x + 3)(x + 2)}$$

se simplifica a ________.

3. Para multiplicar dos expresiones racionales, multiplicamos sus ________ y multiplicamos sus ________. Por tanto, $\dfrac{2}{x + 1} \cdot \dfrac{x}{x + 3}$ es lo mismo que ________.

4. Considere la expresión $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x + 1} - \dfrac{x}{(x + 1)^2}$.

(a) ¿Cuántos términos tiene esta expresión?
(b) Encuentre el mínimo común denominador de todos los términos.
(c) Ejecute la adición y simplifique.

HABILIDADES

5-12 ■ Encuentre el dominio de la expresión.

5. $4x^2 - 10x + 3$

6. $-x^4 + x^3 + 9x$

7. $\dfrac{2x + 1}{x - 4}$

8. $\dfrac{2t^2 - 5}{3t + 6}$

9. $\sqrt{x + 3}$

10. $\dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$

11. $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - x - 2}$

12. $\dfrac{\sqrt{2x}}{x + 1}$

13-22 ■ Simplifique la expresión racional.

13. $\dfrac{3(x+2)(x-1)}{6(x-1)^2}$ **14.** $\dfrac{4(x^2-1)}{12(x+2)(x-1)}$

15. $\dfrac{x-2}{x^2-4}$ **16.** $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$

17. $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+5x+4}$ **18.** $\dfrac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}$

19. $\dfrac{y^2+y}{y^2-1}$ **20.** $\dfrac{y^2-3y-18}{2y^2+5y+3}$

21. $\dfrac{2x^3-x^2-6x}{2x^2-7x+6}$ **22.** $\dfrac{1-x^2}{x^3-1}$

23-38 ■ Ejecute la multiplicación o división y simplifique.

23. $\dfrac{4x}{x^2-4}\cdot\dfrac{x+2}{16x}$ **24.** $\dfrac{x^2-25}{x^2-16}\cdot\dfrac{x+4}{x+5}$

25. $\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-9}\cdot\dfrac{x+3}{x-5}$ **26.** $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3}\cdot\dfrac{3-x}{3+x}$

27. $\dfrac{t-3}{t^2+9}\cdot\dfrac{t+3}{t^2-9}$ **28.** $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x}\cdot\dfrac{x^3+x^2}{x^2-2x-3}$

29. $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2+3x+2}\cdot\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9}$

30. $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{2x^2-xy-y^2}{x^2-xy-2y^2}$

31. $\dfrac{x+3}{4x^2-9}\div\dfrac{x^2+7x+12}{2x^2+7x-15}$

32. $\dfrac{2x+1}{2x^2+x-15}\div\dfrac{6x^2-x-2}{x+3}$

33. $\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2+2x-15}\div\dfrac{x^2+6x+5}{2x^2-7x+3}$

34. $\dfrac{4y^2-9}{2y^2+9y-18}\div\dfrac{2y^2+y-3}{y^2+5y-6}$

35. $\dfrac{\dfrac{x^3}{x+1}}{\dfrac{x}{x^2+2x+1}}$ **36.** $\dfrac{\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-1}}{\dfrac{2x^2+5x+2}{x^2+x-2}}$

37. $\dfrac{x/y}{z}$ **38.** $\dfrac{x}{y/z}$

39-58 ■ Ejecute la adición o sustracción y simplifique.

39. $2+\dfrac{x}{x+3}$ **40.** $\dfrac{2x-1}{x+4}-1$

41. $\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{2}{x-3}$ **42.** $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$

43. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$ **44.** $\dfrac{x}{x-4}-\dfrac{3}{x+6}$

45. $\dfrac{x}{(x+1)^2}+\dfrac{2}{x+1}$ **46.** $\dfrac{5}{2x-3}-\dfrac{3}{(2x-3)^2}$

47. $u+1+\dfrac{u}{u+1}$ **48.** $\dfrac{2}{a^2}-\dfrac{3}{ab}+\dfrac{4}{b^2}$

49. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^2+x}$ **50.** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$

51. $\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{1}{x^2+7x+12}$ **52.** $\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{1}{x-2}$

53. $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x^2-9}$

54. $\dfrac{x}{x^2+x-2}-\dfrac{2}{x^2-5x+4}$

55. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{4}{x^2-x}$

56. $\dfrac{x}{x^2-x-6}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x-3}$

57. $\dfrac{1}{x^2+3x+2}-\dfrac{1}{x^2-2x-3}$

58. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{(x+1)^2}+\dfrac{3}{x^2-1}$

59-68 ■ Simplifique la expresión fraccionaria compuesta.

59. $\dfrac{x+\dfrac{1}{x+2}}{x-\dfrac{1}{x+2}}$ **60.** $\dfrac{1+\dfrac{1}{c-1}}{1-\dfrac{1}{c-1}}$

61. $\dfrac{\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x-3}{x-2}}{x+2}$ **62.** $\dfrac{\dfrac{x-3}{x-4}-\dfrac{x+2}{x+1}}{x+3}$

63. $\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}$ **64.** $x-\dfrac{y}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}$

65. $\dfrac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}$ **66.** $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+y)^{-1}}$

67. $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$ **68.** $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$

69-74 ■ Simplifique la expresión fraccionaria. (Expresiones como éstas aparecen en cálculo.)

69. $\dfrac{\dfrac{1}{1+x+h}-\dfrac{1}{1+x}}{h}$ **70.** $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h}$

71. $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}$

72. $\dfrac{(x+h)^3-7(x+h)-(x^3-7x)}{h}$

73. $\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}$ **74.** $\sqrt{1+\left(x^3-\dfrac{1}{4x^3}\right)^2}$

75-80 ■ Simplifique la expresión. (Este tipo de expresión aparece en cálculo cuando se usa la "regla del cociente".)

75. $\dfrac{3(x+2)^2(x-3)^2-(x+2)^3(2)(x-3)}{(x-3)^4}$

76. $\dfrac{2x(x+6)^4-x^2(4)(x+6)^3}{(x+6)^8}$

77. $\dfrac{2(1+x)^{1/2} - x(1+x)^{-1/2}}{x+1}$

78. $\dfrac{(1-x^2)^{1/2} + x^2(1-x^2)^{-1/2}}{1-x^2}$

79. $\dfrac{3(1+x)^{1/3} - x(1+x)^{-2/3}}{(1+x)^{2/3}}$

80. $\dfrac{(7-3x)^{1/2} + \frac{3}{2}x(7-3x)^{-1/2}}{7-3x}$

81-86 ■ Racionalice el denominador.

81. $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

82. $\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$

83. $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$

84. $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

85. $\dfrac{y}{\sqrt{3}+\sqrt{y}}$

86. $\dfrac{2(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

87-92 ■ Racionalice el numerador.

87. $\dfrac{1-\sqrt{5}}{3}$

88. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$

89. $\dfrac{\sqrt{r}+\sqrt{2}}{5}$

90. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$

91. $\sqrt{x^2+1} - x$

92. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

93-100 ■ Diga si la ecuación dada es verdadera para todos los valores de las variables. (No considere ningún valor que haga que el denominador sea cero.)

93. $\dfrac{16+a}{16} = 1 + \dfrac{a}{16}$

94. $\dfrac{b}{b-c} = 1 - \dfrac{b}{c}$

95. $\dfrac{2}{4+x} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{x}$

96. $\dfrac{x+1}{y+1} = \dfrac{x}{y}$

97. $\dfrac{x}{x+y} = \dfrac{1}{1+y}$

98. $2\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{2a}{2b}$

99. $\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b}$

100. $\dfrac{1+x+x^2}{x} = \dfrac{1}{x} + 1 + x$

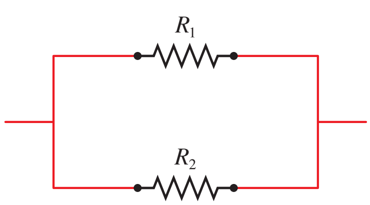
APLICACIONES

101. Resistencia eléctrica Si dos resistores eléctricos con resistencias R_1 y R_2 se conectan en paralelo (vea la figura), entonces la resistencia total R está dada por

$$R = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$$

(a) Simplifique R de la expresión.

(b) Si $R_1 = 10$ ohms y $R_2 = 20$ ohms, ¿cuál es la resistencia R total?



102. Costo promedio Un fabricante de ropa encuentra que el costo de producir x camisas es $500 + 6x + 0.01x^2$ dólares.

(a) Explique por qué el costo promedio por camisa está dado por la expresión racional

$$A = \frac{500 + 6x + 0.01x^2}{x}$$

(b) Complete la tabla al calcular el costo promedio por camisa para los valores dados de x.

x	Costo promedio
10	
20	
50	
100	
200	
500	
1000	

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

103. **Comportamiento límite de una expresión racional** La expresión racional

$$\frac{x^2-9}{x-3}$$

no está definida para $x = 3$. Complete las tablas y determine a cuál valor se aproxima la expresión cuando x se acerca más y más a 3. ¿Por qué es esto razonable? Factorice el numerador de la expresión y simplifique para ver por qué.

x	$\dfrac{x^2-9}{x-3}$
2.80	
2.90	
2.95	
2.99	
2.999	

x	$\dfrac{x^2-9}{x-3}$
3.20	
3.10	
3.05	
3.01	
3.001	

104. **¿Es esto racionalización?** En la expresión $2/\sqrt{x}$ eliminaríamos el radical si fuéramos a elevar al cuadrado tanto el numerador como el denominador. ¿Esto es lo mismo que racionalizar el denominador?

105. **Errores algebraicos** La columna de la izquierda en la tabla de la página siguiente es una lista de algunos errores algebraicos comunes. En cada caso, dé un ejemplo usando números que muestren que la fórmula no es válida. Un ejemplo de este tipo, que muestra que un enunciado es falso, se llama *contraejemplo*.

Error algebraico	Contraejemplo
$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \cancel{=} \dfrac{1}{a+b}$	$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{1}{2+2}$
$(a+b)^2 \cancel{=} a^2 + b^2$	
$\sqrt{a^2+b^2} \cancel{=} a + b$	
$\dfrac{a+b}{a} \cancel{=} b$	
$(a^3+b^3)^{1/3} \cancel{=} a + b$	
$a^m/a^n \cancel{=} a^{m/n}$	
$a^{-1/n} \cancel{=} \dfrac{1}{a^n}$	

106. La forma de una expresión algebraica Una expresión algebraica puede parecer complicada, pero su "forma" siempre es fácil; debe ser una suma, un producto, un cociente o una potencia. Por ejemplo, considere las expresiones siguientes:

$$(1+x^2)^2 + \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^3 \qquad (1+x)\left(1 + \frac{x+5}{1+x^4}\right)$$

$$\frac{5-x^3}{1+\sqrt{1+x^2}} \qquad \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Con elecciones apropiadas para A y B, la primera tiene la forma $A + B$, la segunda AB, la tercera A/B y la cuarta $A^{1/2}$. Reconociendo la forma de una expresión nos ayuda a expandirla, simplificarla o factorizarla correctamente. Encuentre la forma de las siguientes expresiones algebraicas.

(a) $x + \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$ **(b)** $(1+x^2)(1+x)^3$

(c) $\sqrt[3]{x^4(4x^2+1)}$ **(d)** $\dfrac{1-2\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x^2}}$

1.5 ECUACIONES

Solución de ecuaciones lineales ▶ Solución de ecuaciones cuadráticas ▶ Otros tipos de ecuaciones

Una ecuación es un enunciado de que dos expresiones matemáticas son iguales. Por ejemplo,

$$3 + 5 = 8$$

es una ecuación. Casi todas las ecuaciones que estudiamos en álgebra contienen variables, que son símbolos (por lo general literales) que representan números. En la ecuación

$$4x + 7 = 19$$

$x = 3$ es una solución de la ecuación $4x + 7 = 19$, porque sustituir $x = 3$ hace verdadera la ecuación:

$x = 3$

$4(3) + 7 = 19$ ✔

la letra x es la variable. Consideramos x como la "incógnita" de la ecuación, y nuestro objetivo es hallar el valor de x que haga que la ecuación sea verdadera. Los valores de la incógnita que hagan que la ecuación sea verdadera se denominan **soluciones** o **raíces** de la ecuación, y el proceso de hallar las soluciones se llama **resolver la ecuación.**

Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones reciben el nombre de **ecuaciones equivalentes**. Para resolver una ecuación, tratamos de hallar una ecuación equivalente más sencilla en la que la variable está sólo en un lado del signo "igual". A continuación veamos las propiedades que usamos para resolver una ecuación. (En estas propiedades, A, B y C representan cualesquiera expresiones algebraicas, y el símbolo $\Leftrightarrow$ significa "es equivalente a".)

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

Propiedad	Descripción
1. $A = B \quad \Leftrightarrow \quad A + C = B + C$	Sumar la misma cantidad a ambos lados de una ecuación da una ecuación equivalente.
2. $A = B \quad \Leftrightarrow \quad CA = CB \quad (C \neq 0)$	Multiplicar ambos lados de una ecuación por la misma cantidad diferente de cero da una ecuación equivalente.