10.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones ▶ Método de sustitución ▶ Método por eliminación ▶ Método gráfico ▶ El número de soluciones de un sistema lineal con dos incógnitas ▶ Modelado con sistemas lineales

▼ Sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una ecuación de la forma

$$ax + by = c$$

La gráfica de una ecuación lineal es una recta (vea Sección 1.10).

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas. Un **sistema de ecuaciones lineales** es un sistema de ecuaciones en el que cada ecuación es lineal. Una **solución** de un sistema es una asignación de valores para las incógnitas que hace verdadera *cada una* de las ecuaciones. **Resolver** un sistema significa hallar todas las soluciones del sistema.

Veamos a continuación un ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 & \text{Ecuación 1} \\ x + 4y = 7 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Podemos comprobar que $x = 3$ y $y = 1$ es una solución de este sistema.

Ecuación 1	**Ecuación 2**
$2x - y = 5$	$x + 4y = 7$
$2(3) - 1 = 5$ ✔	$3 + 4(1) = 7$ ✔

La solución también se puede escribir como el par ordenado (3, 1).

Observe que las gráficas de las Ecuaciones 1 y 2 son rectas (vea Figura 1). Como la solución (3, 1) satisface cada una de las ecuaciones, el punto (3, 1) se encuentra en cada recta. Por lo tanto, es el punto de intersección de las dos rectas.

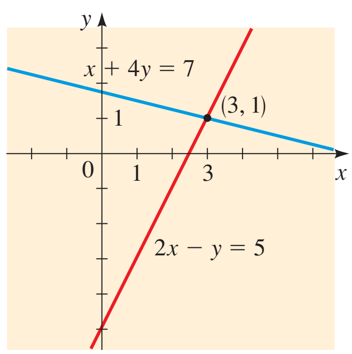


FIGURA 1

▼ Método de sustitución

En el **método de sustitución** empezamos con una ecuación en el sistema y despejamos una incógnita en términos de la otra incógnita. El recuadro siguiente describe el procedimiento.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

1. **Despejar una incógnita.** Escoja una ecuación y despeje una incógnita en términos de la otra incógnita.
2. **Sustituir.** Sustituya la expresión hallada en el Paso 1 en la otra ecuación, para obtener una ecuación con una incógnita y, a continuación despeje esa incógnita.
3. **Sustituir a la inversa.** En la expresión hallada en el Paso 1, sustituya el valor hallado en el Paso 2 para despejar la incógnita restante.

EJEMPLO 1 | Método de sustitución

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 3x + 4y = 14 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN Despejar una incógnita. Despejamos y en la primera ecuación.

$$y = 1 - 2x \qquad \text{Despeje } y \text{ en la Ecuación 1}$$

Sustituir. A continuación sustituimos y en la segunda ecuación y despejamos x.

$$\begin{aligned} 3x + 4(1 - 2x) &= 14 && \text{Sustituya } y = 1 - 2x \text{ en la Ecuación 2} \\ 3x + 4 - 8x &= 14 && \text{Expanda} \\ -5x + 4 &= 14 && \text{Simplifique} \\ -5x &= 10 && \text{Reste 4} \\ x &= -2 && \text{Despeje } x \end{aligned}$$

Sustitución. A continuación sustituimos $x = -2$ en la ecuación $y = 1 - 2x$.

$$y = 1 - 2(-2) = 5 \qquad \text{Sustitución}$$

Entonces, $x = -2$ y $y = 5$, de modo que la solución es el par ordenado $(-2, 5)$. La Figura 2 muestra que las gráficas de las dos ecuaciones se cruzan en el punto $(-2, 5)$.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = -2, y = 5$:

$$\begin{cases} 2(-2) + 5 = 1 \\ 3(-2) + 4(5) = 14 \end{cases} \checkmark$$

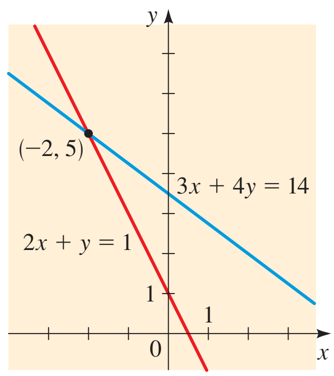


FIGURA 2

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

Método por eliminación

Para resolver un sistema usando el **método de eliminación**, tratamos de combinar las ecuaciones usando sumas o restas para eliminar una de las incógnitas.

MÉTODO POR ELIMINACIÓN

1. **Ajustar los coeficientes.** Multiplique una o más de las ecuaciones por números apropiados, de modo que el coeficiente de una incógnita de una ecuación sea el negativo de su coeficiente en la otra ecuación.
2. **Sumar las ecuaciones.** Sume las dos ecuaciones para eliminar una incógnita y, a continuación, despeje la incógnita restante.
3. **Sustituir a la inversa.** En una de las ecuaciones originales, sustituya el valor hallado en el Paso 2 y despeje la incógnita restante.

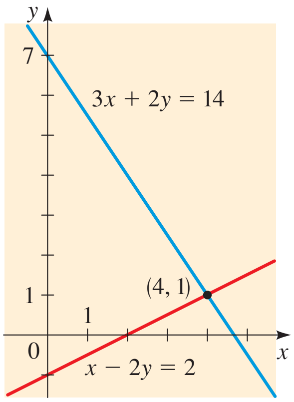


FIGURA 3

EJEMPLO 2 | Método por eliminación

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 & \text{Ecuación 1} \\ x - 2y = 2 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN Como los coeficientes de los términos en y son negativos entre sí, podemos sumar las ecuaciones para eliminar y.

$$\begin{array}{rcll} \begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ x - 2y = 2 \end{cases} & & & \text{Sistema} \\ \hline 4x \qquad = 16 & & & \text{Sume} \\ x = 4 & & & \text{Despeje } x \end{array}$$

A continuación sustituimos $x = 4$ en una de las ecuaciones originales y despejamos y. Escojamos la segunda ecuación porque se ve más sencilla.

$$\begin{aligned} x - 2y &= 2 && \text{Ecuación 2} \\ 4 - 2y &= 2 && \text{Sustituya } x = 4 \text{ en la Ecuación 2} \\ -2y &= -2 && \text{Reste 4} \\ y &= 1 && \text{Despeje } y \end{aligned}$$

La solución es $(4, 1)$. La Figura 3 muestra que las gráficas de las ecuaciones del sistema se cruzan en el punto $(4, 1)$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9**

▼ Método gráfico

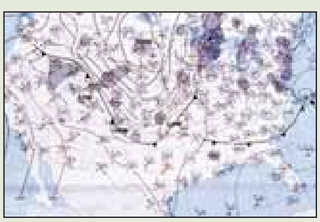
En el **método gráfico** usamos calculadora graficadora para resolver el sistema de ecuaciones.

MÉTODO GRÁFICO

1. **Graficar cada ecuación.** Exprese cada ecuación en una forma apropiada para la calculadora graficadora para despejar y como función de x. Grafique las ecuaciones en la misma pantalla.
2. **Hallar los puntos de intersección.** Las soluciones son las coordenadas x y y de los puntos de intersección.

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

Predicción del clima



Los meteorólogos modernos hacen mucho más que pronosticar el clima de mañana. Investigan modelos del clima a largo plazo, el agotamiento de la capa de ozono, el calentamiento global y otros efectos de la actividad humana en el clima. No obstante, el pronóstico diario del clima es todavía una parte importante de la meteorología; su valor es medido por las innumerables vidas humanas salvadas cada año por medio de un pronóstico preciso de huracanes, ventiscas y otros fenómenos catastróficos del clima. A principios del siglo XX unos matemáticos propusieron modelar el clima con ecuaciones que usaban los valores actuales de cientos de variables atmosféricas. Aun cuando este modelo funcionaba en principio, era imposible pronosticar modelos futuros con él por la dificultad para medir con precisión todas las variables y resolver todas las ecuaciones. Hoy en día, nuevos modelos matemáticos, combinados con simulaciones computarizadas de alta velocidad y mejores datos, han mejorado en gran medida el pronóstico del clima y con ello se han evitado numerosos desastres económicos y pérdidas de vida. Los matemáticos de la National Oceanographic and Atmospheric Administration (NOAA) están continuamente investigando mejores métodos para el pronóstico del clima.

EJEMPLO 3 | Método gráfico

Encuentre todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 1.35x - 2.13y = -2.36 \\ 2.16x + 0.32y = 1.06 \end{cases}$$

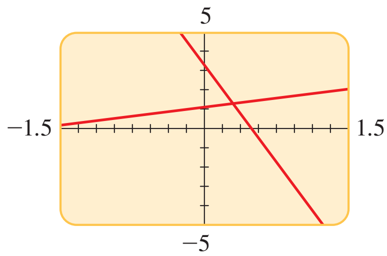


FIGURA 4

SOLUCIÓN Despejando y en términos de x, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = 0.63x + 1.11 \\ y = -6.75x + 3.31 \end{cases}$$

donde hemos redondeado los coeficientes a dos decimales. La Figura 4 muestra que las dos rectas se cruzan; en un acercamiento vemos que la solución es aproximadamente (0.30, 1.3).

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **13** Y **49**

El número de soluciones de un sistema lineal con dos incógnitas

La gráfica de un sistema lineal con dos incógnitas es un par de rectas, de modo que, para resolver gráficamente el sistema, debemos hallar el (los) punto(s) de intersección de las rectas. Dos rectas pueden cruzarse en un solo punto, pueden ser paralelas o pueden coincidir, como se ve en la Figura 5. Por lo tanto, hay tres posibles resultados para resolver el sistema.

NÚMERO DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA LINEAL CON DOS INCÓGNITAS

Para un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera. (Vea Figura 5.)

1. El sistema tiene exactamente una solución.
2. El sistema no tiene solución.
3. El sistema tiene un número infinito de soluciones.

Se dice que un sistema que no tiene solución es **inconsistente**. Un sistema con un infinito de soluciones se llama **consistente indeterminado**.

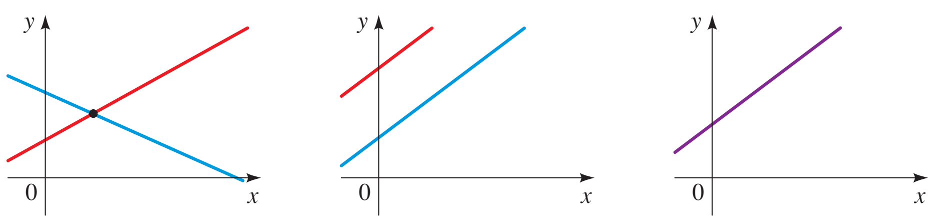


FIGURA 5

(a) Las rectas se cruzan en un solo punto. El sistema tiene una solución.

(b) Las rectas son paralelas y no se cruzan. El sistema no tiene solución.

(c) Las rectas coinciden; las ecuaciones son para la misma recta. El sistema tiene un infinito de soluciones.

EJEMPLO 4 | Un sistema lineal con una solución

Resuelva el sistema y grafique las rectas.

$$\begin{cases} 3x - y = 0 & \text{Ecuación 1} \\ 5x + 2y = 22 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

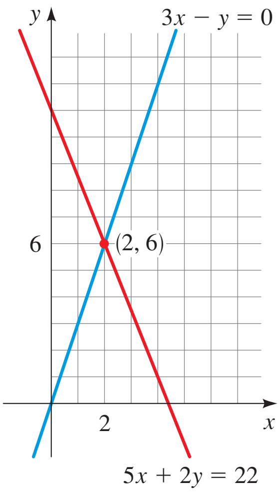


FIGURA 6

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 2, \quad y = 6$:

$$\begin{cases} 3(2) - (6) = 0 \\ 5(2) + 2(6) = 22 \end{cases} \quad ✔$$

SOLUCIÓN Eliminamos y de las ecuaciones y despejamos x.

$$\begin{array}{rll} \begin{cases} 6x - 2y = 0 \\ 5x + 2y = 22 \end{cases} & & 2 \times \text{Ecuación } 1 \\ \hline 11x \qquad = 22 & & \text{Sume} \\ x = 2 & & \text{Despeje } x \end{array}$$

Ahora sustituimos de nuevo en la primera ecuación y despejamos y:

$$\begin{aligned} 6(2) - 2y &= 0 && \text{Sustituimos de nuevo } x = 2 \\ -2y &= -12 && \text{Restamos } 6 \times 2 = 12 \\ y &= 6 && \text{Despejamos } y \end{aligned}$$

La solución del sistema es el par ordenado (2, 6), es decir,

$$x = 2, \qquad y = 6$$

La gráfica de la Figura 6 muestra que las rectas del sistema se cruzan en el punto (2, 6).

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23** ■

EJEMPLO 5 | Un sistema lineal sin solución

Resuelva el sistema.

$$\begin{cases} 8x - 2y = 5 & \text{Ecuación } 1 \\ -12x + 3y = 7 & \text{Ecuación } 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Esta vez tratamos de hallar una combinación apropiada de las dos ecuaciones para eliminar la variable y. La multiplicación de la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por 2 da

$$\begin{array}{rl} \begin{cases} 24x - 6y = 15 \\ -24x + 6y = 14 \end{cases} & \begin{array}{l} 3 \times \text{Ecuación } 1 \\ 2 \times \text{Ecuación } 2 \end{array} \\ \hline 0 = 29 & \text{Sume} \end{array}$$

La suma de las dos ecuaciones elimina *tanto x como y* en este caso, y terminamos con $0 = 29$, que es obviamente falso. No importa qué valores asignemos a x y a y, no podemos hacer que este enunciado sea verdadero, de manera que el sistema *no tiene solución*. La Figura 7 muestra que las rectas del sistema son paralelas y no se cruzan. El sistema es inconsistente.

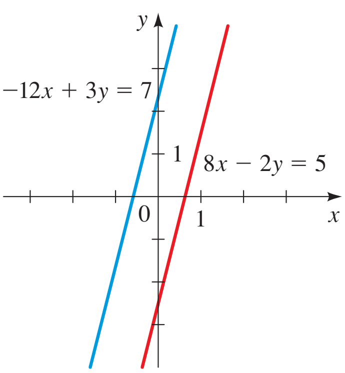


FIGURA 7

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35** ■

EJEMPLO 6 | Un sistema lineal con un infinito de soluciones

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x - 6y = 12 & \text{Ecuación } 1 \\ 4x - 8y = 16 & \text{Ecuación } 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Multiplicamos la primera ecuación por 4 y la segunda por 3 para preparar la resta de las ecuaciones para eliminar x. Las nuevas ecuaciones son

$$\begin{cases} 12x - 24y = 48 & 4 \times \text{Ecuación } 1 \\ 12x - 24y = 48 & 3 \times \text{Ecuación } 2 \end{cases}$$

Vemos que las dos ecuaciones del sistema original son simplemente formas diferentes de expresar la ecuación de una sola recta. Las coordenadas de cualquier punto en esta recta dan una solución del sistema. Escribiendo la ecuación en forma de pendiente e intersección, tenemos $y = \frac{1}{2}x - 2$. Por lo tanto, si con t representamos cualquier número real, podemos escribir la solución como

$$x = t$$
$$y = \tfrac{1}{2}t - 2$$

También podemos escribir la solución en forma de par ordenado como

$$\left(t, \tfrac{1}{2}t - 2\right)$$

donde t es cualquier número real. El sistema tiene un infinito de soluciones (vea Figura 8).

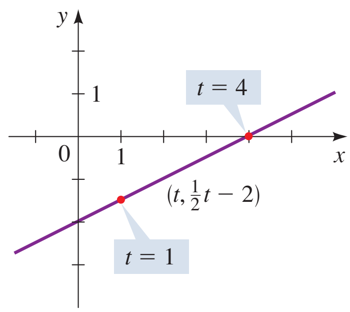


FIGURA 8

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **37**

En el Ejemplo 3, para obtener soluciones específicas tenemos que asignar valores a t. Por ejemplo, si $t = 1$, obtenemos la solución $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$. si $t = 4$, obtenemos la solución $(4, 0)$. Para todo valor de t obtenemos una solución diferente. (Vea Figura 8.)

Modelado con sistemas lineales

Con frecuencia, cuando usamos ecuaciones para resolver problemas en las ciencias o en otros campos de actividad, obtenemos sistemas como el que acabamos de considerar. Cuando modelamos con sistemas de ecuaciones, usamos las siguientes guías, que son semejantes a las de la Sección 1.6.

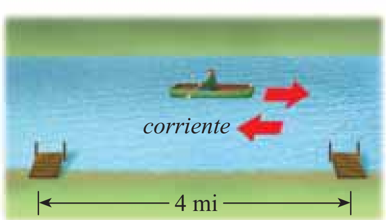
GUÍA PARA MODELAR CON SISTEMAS DE ECUACIONES

1. **Identificar las variables.** Identifique las cantidades que el problema pide hallar. Éstas en general se determinan mediante cuidadosa lectura de la pregunta planteada al final del problema. Introduzca notación para las variables (llámelas x y y o con alguna otra letra).
2. **Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de las variables.** Lea otra vez el problema, y exprese todas las cantidades mencionadas en el problema en términos de las variables que haya definido en el Paso 1.
3. **Establezca un sistema de ecuaciones.** Encuentre los datos cruciales del problema que den las relaciones entre las expresiones que haya encontrado en el Paso 2. Establezca un sistema de ecuaciones (o un modelo) que exprese estas relaciones.
4. **Resuelva el sistema e interprete los resultados.** Resuelva el sistema que haya encontrado en el Paso 3, verifique sus soluciones y dé su respuesta final como una frase que conteste la pregunta planteada en el problema.

Los dos ejemplos siguientes ilustran cómo modelar con sistemas de ecuaciones.

EJEMPLO 7 | Un problema de distancia, rapidez y tiempo

Una mujer rema un bote aguas arriba desde un punto en un río, a otro punto a 4 millas de distancia, en $1\frac{1}{2}$ horas. El viaje de regreso, a favor de la corriente, le toma sólo 45 minutos. ¿Cuál es la velocidad con la que rema con respecto al agua, y con qué velocidad se mueve la corriente?



SOLUCIÓN Identificar las variables. Nos piden hallar la velocidad con la que rema la mujer y la velocidad de la corriente, de modo que hacemos

$$x = \text{velocidad de remar (mi/h)}$$
$$y = \text{velocidad de la corriente (mi/h)}$$

Expresar cantidades desconocidas en términos de la variable. La velocidad de la mujer cuando rema aguas arriba es su velocidad para remar menos la velocidad de la corriente; su velocidad aguas abajo es su velocidad para remar más la velocidad de la corriente. Ahora convertimos esta información al lenguaje de álgebra.

En palabras	En álgebra
Velocidad de remo	x
Velocidad de la corriente	y
Velocidad aguas arriba	$x - y$
Velocidad aguas abajo	$x + y$

Establecer un sistema de ecuaciones. La distancia aguas arriba y aguas abajo es 4 millas, de modo que usando el hecho de que velocidad × tiempo = distancia para los dos tramos del viaje, tenemos

velocidad aguas arriba × tiempo aguas arriba = distancia recorrida

velocidad aguas abajo × tiempo aguas abajo = distancia recorrida

En notación algebraica esto se convierte en las ecuaciones siguientes:

$$(x - y)\tfrac{3}{2} = 4 \qquad \text{Ecuación 1}$$

$$(x + y)\tfrac{3}{4} = 4 \qquad \text{Ecuación 2}$$

(Los tiempos se han convertido a horas, porque estamos expresando la rapidez en millas por *hora*.)

Resolver el sistema. Multiplicamos las ecuaciones por 2 y 4, respectivamente, para despejar los denominadores.

$$\begin{cases} 3x - 3y = 8 & 2 \times \text{Ecuación 1} \\ 3x + 3y = 16 & 4 \times \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 6x &= 24 && \text{Sume} \\ x &= 4 && \text{Despeje } x \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor de x en la primera ecuación (también funciona la segunda) y despejando y, tendremos

$$\begin{aligned} 3(4) - 3y &= 8 && \text{Sustituya } x = 4 \\ -3y &= 8 - 12 && \text{Reste 12} \\ y &= \tfrac{4}{3} && \text{Despeje } y \end{aligned}$$

La mujer rema a 4 mi/h, y la corriente se mueve a $1\frac{1}{3}$ mi/h.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Velocidad contra la corriente es

$$\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{4 \text{ mi}}{1\frac{1}{2}\text{ h}} = 2\tfrac{2}{3}\text{ mi/h}$$

y esto debe ser igual a

velocidad de remo − flujo del agua

$$= 4 \text{ mi/h} - \tfrac{4}{3}\text{ mi/h} = 2\tfrac{2}{3}\text{ mi/h}$$

Velocidad rio abajo es

$$\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{4 \text{ mi}}{\frac{3}{4}\text{ h}} = 5\tfrac{1}{3}\text{ mi/h}$$

y esto debe ser igual a

velocidad de remo + flujo del agua

$$= 4 \text{ mi/h} + \tfrac{4}{3}\text{ mi/h} = 5\tfrac{1}{3}\text{ mi/h}$$ ✔

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63**

EJEMPLO 8 | Un problema de mezclas

Un vinatero fortifica vino que contiene 10% de alcohol al agregarle una solución de alcohol al 70%. La mezcla resultante tiene un contenido alcohólico del 16% y llena 1000 botellas de un litro. ¿Cuántos litros (L) del vino y la solución de alcohol usa el vinatero?

SOLUCIÓN Identificar las variables. Como nos piden las cantidades de vino y alcohol, hacemos

$$x = \text{cantidad de vino utilizado (L)}$$

$$y = \text{cantidad de solución de alcohol utilizada (L)}$$

Expresar todas las cantidades desconocidas en términos de la variable. Del hecho que el vino contiene 10% de alcohol y la solución contiene 70% de alcohol, obtenemos lo siguiente.

En palabras	En álgebra
Cantidad de vino utilizada (L)	x
Cantidad de solución de alcohol utilizada (L)	y
Cantidad de alcohol en vino (L)	$0.10x$
Cantidad de alcohol en solución (L)	$0.70y$

Establecer un sistema de ecuaciones. El volumen de la mezcla debe ser el total de los dos volúmenes que el vinatero mezcla, y

$$x + y = 1000$$

También, la cantidad de alcohol en la mezcla debe ser el total del alcohol aportado por el vino y por la solución de alcohol, es decir,

$$0.10x + 0.70y = (0.16)1000$$

$$0.10x + 0.70y = 160 \qquad \text{Simplifique}$$

$$x + 7y = 1600 \qquad \text{Multiplique por 10 para quitar decimales}$$

En consecuencia, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1000 & \text{Ecuación 1} \\ x + 7y = 1600 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Resolver el sistema. Restando la primera ecuación de la segunda se elimina la variable x y obtenemos

$$6y = 600 \qquad \text{Reste la Ecuación 1 de la Ecuación 2}$$

$$y = 100 \qquad \text{Despeje } y$$

Ahora sustituimos $y = 100$ en la primera ecuación y despejamos x.

$$x + 100 = 1000 \qquad \text{Sustituimos } y = 100$$

$$x = 900 \qquad \text{Despejamos } x$$

El vinatero utiliza 900 L de vino y 100 L de solución de alcohol.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65**

10.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$$

es un sistema de dos ecuaciones con las dos incógnitas _________ y _________. Para determinar si $(5, -1)$ es una solución de este sistema, verificamos si $x = 5$ y $y = -1$ satisfacen cada _________ del sistema. ¿Cuáles de las siguientes son soluciones de este sistema?

$$(5, -1), \quad (-1, 3), \quad (2, 1)$$

2. Un sistema de ecuaciones con dos incógnitas puede ser resuelto por el método de _________, el método de _________ o el método _________.

3. Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede tener una solución, _________ solución o _________ _________ soluciones.

4. El siguiente es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

La gráfica de la primera ecuación es la misma que la gráfica de la segunda ecuación, de manera que el sistema tiene _________ _________ soluciones. Expresamos estas soluciones escribiendo

$$x = t$$
$$y = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

donde t es cualquier número real. Algunas de las soluciones de este sistema son (1, __), (−3, __) y (5, __).

HABILIDADES

5-8 ■ Use el método de sustitución para hallar todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

5. $\begin{cases} x - y = 1 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

9-12 ■ Use el método de eliminación para hallar todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

9. $\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ x - 4y = -2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 4x + y = 21 \end{cases}$

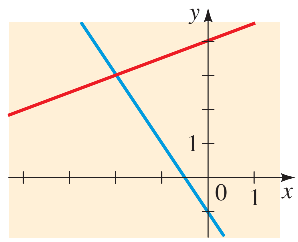
11. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$

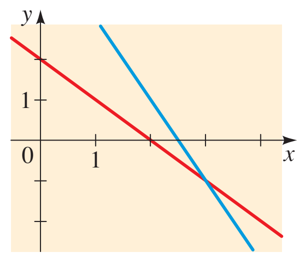
12. $\begin{cases} 4x - 3y = 11 \\ 8x + 4y = 12 \end{cases}$

13-14 ■ Nos dan dos ecuaciones y sus gráficas. Encuentre el (los) punto(s) de intersección de las gráficas resolviendo el sistema.

13. $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 2y = -8 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$





15-20 ■ Grafique cada uno de los sistemas lineales siguientes, ya sea manualmente o con calculadora graficadora. Use la gráfica para determinar si el sistema tiene una solución, no tiene solución o tiene un infinito de soluciones. Si hay exactamente una solución, use la gráfica para hallarla.

15. $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ -x + \frac{3}{2}y = 4 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ -3x - 9y = 18 \end{cases}$

19. $\begin{cases} -x + \frac{1}{2}y = -5 \\ 2x - \phantom{\frac{1}{2}}y = 10 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 12x + 15y = -18 \\ 2x + \frac{5}{2}y = -3 \end{cases}$

21-48 ■ Resuelva el sistema, o demuestre que no tiene solución. Si el sistema tiene un infinito de soluciones, expréselas en la forma de par ordenado dado en el Ejemplo 6.

21. $\begin{cases} x + y = 4 \\ -x + y = 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 8 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

27. $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 4x - 3y = -3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 4x - 3y = 28 \\ 9x - y = -6 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 5x - y = 2 \end{cases}$

30. $\begin{cases} -4x + 12y = 0 \\ 12x + 4y = 160 \end{cases}$

31. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2 \\ \frac{1}{5}x - \frac{2}{3}y = 8 \end{cases}$

32. $\begin{cases} 0.2x - 0.2y = -1.8 \\ -0.3x + 0.5y = 3.3 \end{cases}$

33. $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

34. $\begin{cases} 4x + 2y = 16 \\ x - 5y = 70 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x + 4y = 8 \\ 3x + 12y = 2 \end{cases}$

36. $\begin{cases} -3x + 5y = 2 \\ 9x - 15y = 6 \end{cases}$

37. $\begin{cases} 2x - 6y = 10 \\ -3x + 9y = -15 \end{cases}$

38. $\begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ 14x - 21y = 3 \end{cases}$

39. $\begin{cases} 6x + 4y = 12 \\ 9x + 6y = 18 \end{cases}$

40. $\begin{cases} 25x - 75y = 100 \\ -10x + 30y = -40 \end{cases}$

41. $\begin{cases} 8s - 3t = -3 \\ 5s - 2t = -1 \end{cases}$

42. $\begin{cases} u - 30v = -5 \\ -3u + 80v = 5 \end{cases}$

43. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y = 3 \\ \frac{5}{3}x + 2y = 10 \end{cases}$

44. $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{2} \\ 2x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

45. $\begin{cases} 0.4x + 1.2y = 14 \\ 12x - 5y = 10 \end{cases}$

46. $\begin{cases} 26x - 10y = -4 \\ -0.6x + 1.2y = 3 \end{cases}$

47. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = 2 \\ -8x + 6y = 10 \end{cases}$

48. $\begin{cases} -\frac{1}{10}x + \frac{1}{2}y = 4 \\ 2x - 10y = -80 \end{cases}$

49-52 ■ Use calculadora graficadora para graficar ambas rectas en el mismo rectángulo de vista. (Observe que debe despejar y en términos de x antes de graficar si usa calculadora graficadora.) Resuelva el sistema redondeado a dos lugares decimales, ya sea con acercamiento y usando `TRACE` o usando la función `Intersect`.

49. $\begin{cases} 0.21x + 3.17y = 9.51 \\ 2.35x - 1.17y = 5.89 \end{cases}$

50. $\begin{cases} 18.72x - 14.91y = 12.33 \\ 6.21x - 12.92y = 17.82 \end{cases}$

51. $\begin{cases} 2371x - 6552y = 13{,}591 \\ 9815x + 992y = 618{,}555 \end{cases}$

52. $\begin{cases} -435x + 912y = 0 \\ 132x + 455y = 994 \end{cases}$

53-56 ■ Encuentre x y y en términos de a y b.

53. $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + ay = 1 \end{cases} \quad (a \neq 1)$

54. $\begin{cases} ax + by = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad (a \neq b)$

55. $\begin{cases} ax + by = 1 \\ bx + ay = 1 \end{cases} \quad (a^2 - b^2 \neq 0)$

56. $\begin{cases} ax + by = 0 \\ a^2x + b^2y = 1 \end{cases} \quad (a \neq 0, b \neq 0, a \neq b)$

APLICACIONES

57. Problema de números Encuentre dos números cuya suma es 34 y cuya diferencia es 10.

58. Problema de números La suma de dos números es el doble de su diferencia. El número más grande es 6 más que el doble del más pequeño. Encuentre los números.

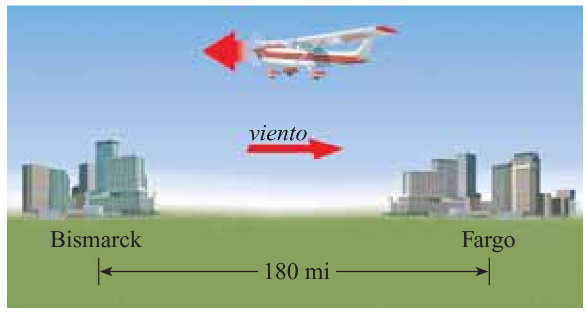
59. Valor de monedas Un hombre tiene 14 monedas en su bolsillo, todas las cuales son de 10 o de 25 centavos. Si el valor total de su cambio es \$2.75, ¿cuántas monedas de 10 centavos y cuántas de 25 centavos tiene?

60. Precio de entrada El precio de entrada a un parque de diversiones es \$1.50 para niños y \$4.00 para adultos. En cierto día, 2200 personas entraron al parque, y los precios de entrada recolectados sumaron \$5050. ¿Cuántos niños y cuántos adultos entraron?

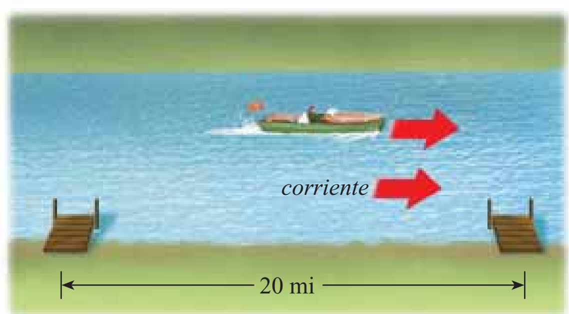
61. Gasolinera Una gasolinera vende gasolina regular en \$2.20 el galón y gasolina Premium en \$3.00 el galón. Al final del día se vendieron 280 galones de gasolina y los recibos totalizaron \$680. ¿Cuántos galones de cada tipo se vendieron?

62. Puesto de frutas Un puesto de frutas vende dos variedades de fresas: estándar y de lujo. Una caja de fresas estándar se vende en \$7 y una de lujo se vende en \$10. En un día, el puesto vende 135 cajas de fresas en un total de \$1100. ¿Cuántas cajas de cada tipo se vendieron?

63. Velocidad de un avión Un hombre vuela en un pequeño avión de Fargo a Bismarck, Dakota del Norte, una distancia de 180 millas. Debido a que hizo el vuelo con un viento de frente, el viaje le lleva 2 horas. En el viaje de regreso, el viento todavía está soplando con la misma velocidad, de modo que el viaje le lleva sólo 1 h 12 min. ¿Cuál es la velocidad del piloto con viento en calma, y con qué velocidad sopla el viento?



64. Velocidad de un bote Un bote en un río navega aguas abajo entre dos puntos, a 20 millas de distancia, en una hora. El viaje de regreso contra la corriente toma $2\frac{1}{2}$ horas. ¿Cuál es la velocidad del bote, y con qué velocidad se mueven las aguas del río?



65. Nutrición Una investigadora realiza un experimento para probar una hipótesis donde intervienen los nutrientes niacina y retinol. Ella alimenta a un grupo de ratas de laboratorio con una dieta diaria de precisamente 32 unidades de niacina y 22,000 unidades de retinol. Ella usa dos tipos de alimentos comerciales en forma de pastillas. El alimento A contiene 0.12 unidades de niacina y 100 unidades de retinol por gramo; el alimento B contiene 0.20 unidades de niacina y 50 unidades de retinol por gramo. ¿Cuántos gramos de cada alimento les da ella al grupo de ratas diariamente?

66. Mezclas de café Un cliente en una cafetería compra una mezcla de dos clases de café: Kenia, que cuesta \$3.50 la libra, y Sri Lanka, que cuesta \$5.60 la libra. Él compra 3 libras de la mezcla, que le cuestan \$11.55. ¿Cuántas libras de cada clase entraron en la mezcla?

67. Problema de mezclas Un químico tiene dos grandes contenedores de solución de ácido sulfúrico, con diferentes concentraciones de ácido en cada contenedor. La mezcla de 300 mL de la primera solución y 600 mL de la segunda le da una mezcla que es 15% ácida, mientras que si mezcla 100 mL de la primera y 500 mL de la segunda le da una mezcla $12\frac{1}{2}$% ácida. ¿Cuáles son las concentraciones de ácido sulfúrico en los recipientes originales?

68. Problema de mezclas Una bióloga tiene dos soluciones de salmuera, una contiene 5% de sal y otra contiene 20% de sal. ¿Cuántos mililitros de cada solución debe ella mezclar para obtener 1 L de una solución que contenga 14% de sal?

69. Inversiones Una mujer invierte un total de \$20,000 en dos cuentas, una paga 5% y la otra paga 8% de interés simple al año. El interés anual que ella percibe es \$1180. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

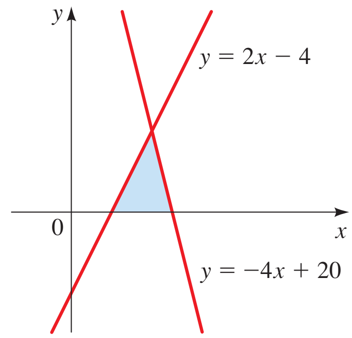
70. Inversiones Un hombre invierte sus ahorros en dos cuentas, una paga 6% y la otra paga 10% de interés simple al año. Él pone el doble en la cuenta que rinde menos porque es de menos riesgo. El interés que él percibe es \$3520. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

71. Distancia, velocidad y tiempo Juan y María salen de su casa al mismo tiempo y en auto se dirigen en direcciones opuestas. Juan maneja a 60 mi/h y viaja 35 millas más que María, quien maneja a 40 mi/h. El viaje de María toma 15 minutos más que a Juan. ¿Durante cuánto tiempo manejan ellos?

72. Ejercicio aeróbico Una mujer se mantiene en forma haciendo ejercicio en bicicleta y corriendo todos los días. El lunes ella pasa $1\frac{1}{2}$ horas en cada una de esas actividades, cubriendo un total de $12\frac{1}{2}$ millas. El martes corre durante 12 minutos y anda en bicicleta 45 minutos, cubriendo un total de 16 millas. Suponiendo que su velocidad para correr y andar en bicicleta no cambian de un día a otro, encuentre esas velocidades.

73. Problema de números La suma de los dígitos de un número de dos dígitos es 7. Cuando los dígitos se invierten, el número aumenta en 27. Encuentre el número.

74. Área de un triángulo Encuentre el área del triángulo que se encuentra en el primer cuadrante (con la base sobre el eje x) y que está limitado por las rectas $y = 2x - 4$ y $y = -4x + 20$.



DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

75. La recta de mínimos cuadrados La recta de *mínimos cuadrados* o recta de *regresión* es la recta que mejor se ajusta a un conjunto de puntos en el plano. Estudiamos esta recta en el *Enfoque sobre modelado* que sigue al Capítulo 1 (vea página 130.) Mediante cálculo, se puede demostrar que la recta que mejor se ajusta a los n puntos de datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ es la recta $y = ax + b$, donde los coeficientes a y b satisfacen el siguiente par de ecuaciones lineales. (La notación $\sum_{k=1}^{n} x_k$ representa la suma de todas las x. En la Sección 12.1 vea una descripción completa de la notación (Σ).)

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)a + nb = \sum_{k=1}^{n} y_k$$
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)a + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)b = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Use estas ecuaciones para hallar la recta de mínimos cuadrados para los siguientes puntos de datos.

$$(1, 3), \quad (2, 5), \quad (3, 6), \quad (5, 6), \quad (7, 9)$$

Trace los puntos y su recta para confirmar que la recta se ajusta bien a estos puntos. Si su calculadora calcula regresión lineal, vea si le da la misma recta que las fórmulas.

10.2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON VARIAS INCÓGNITAS

Solución de un sistema lineal ▶ El número de soluciones de un sistema lineal ▶ Modelado de un problema financiero usando un sistema lineal

Una **ecuación lineal con *n* incógnitas** es una ecuación que se puede poner en la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y c son números reales, y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las incógnitas. Si sólo tenemos tres o cuatro incógnitas, en general usamos x, y, z y w en lugar de x_1, x_2, x_3, y x_4. Tales ecuaciones se llaman *lineales* porque si tenemos sólo dos incógnitas, la ecuación es $a_1x + a_2y = c$, que es la ecuación de una recta. A continuación veamos algunos ejemplos de ecuaciones con tres incógnitas que ilustran la diferencia entre ecuaciones lineales y no lineales.