JAMES STEWART | LOTHAR REDLIN | SALEEM WATSON

# PRECÁLCULO

## MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO

6e



CAPÍTULO 1

# FUNDAMENTOS



En este primer capítulo repasamos los números reales, ecuaciones y el plano coordenado. Es probable que el lector ya se encuentre familiarizado con estos conceptos, pero es útil ver de nuevo cómo funcionan estas ideas para resolver problemas y modelar (o describir) situaciones prácticas.

Veamos la forma en que todas estas ideas se usan en una situación real: suponga que a usted le pagan \$9 por hora en su trabajo de tiempo parcial. Podemos *modelar* su paga $y$ por trabajar $x$ horas mediante la ecuación $y = 9x$. Para averiguar cuántas horas necesita trabajar para que le paguen 200 dólares, resolvemos la ecuación $200 = 9x$. Graficar la ecuación $y = 9x$ en un *plano coordenado* nos ayuda a "ver" cómo aumenta la paga con las horas trabajadas.

# 1.1 NÚMEROS REALES

**Propiedades de los números reales ▶ Adición y sustracción ▶ Multiplicación y división ▶ La recta de números reales ▶ Conjuntos e intervalos ▶ Valor absoluto y distancia**

Repasemos los tipos de números que conforman el sistema de números reales. Empecemos con los **números naturales:**

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

Los diferentes tipos de números reales fueron inventados para satisfacer necesidades específicas. Por ejemplo, los números naturales se necesitan para contar, los números negativos para describir una deuda o temperaturas bajo cero, los números racionales para conceptos como "medio galón de leche," y números irracionales para medir ciertas magnitudes, como la diagonal de un cuadrado.

Los **enteros** constan de los números naturales junto con sus negativos y 0:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Construimos los **números racionales** al tomar razones de enteros. Entonces, cualquier número racional $r$ puede expresarse como

$$r = \frac{m}{n}$$

donde $m$ y $n$ son enteros y $n \neq 0$. Como ejemplos, tenemos

$$\tfrac{1}{2} \qquad -\tfrac{3}{7} \qquad 46 = \tfrac{46}{1} \qquad 0.17 = \tfrac{17}{100}$$

(Recuerde que una división entre 0 siempre se excluye, de modo que expresiones como $\frac{3}{0}$ y $\frac{0}{0}$ no están definidas.) También hay números reales, tales como $\sqrt{2}$, que no se pueden expresar como una razón entre enteros y por tanto se denominan **números irracionales.** Se puede demostrar, con diferentes grados de dificultad, que estos números también son irracionales:

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{2} \qquad \pi \qquad \frac{3}{\pi^2}$$

Por lo general el conjunto de todos los números reales se denota con el símbolo $\mathbb{R}$. Cuando usamos la palabra *número* sin más detalle, queremos decir "número real". La Figura 1 es un diagrama de los tipos de números reales con los que trabajamos en este libro.

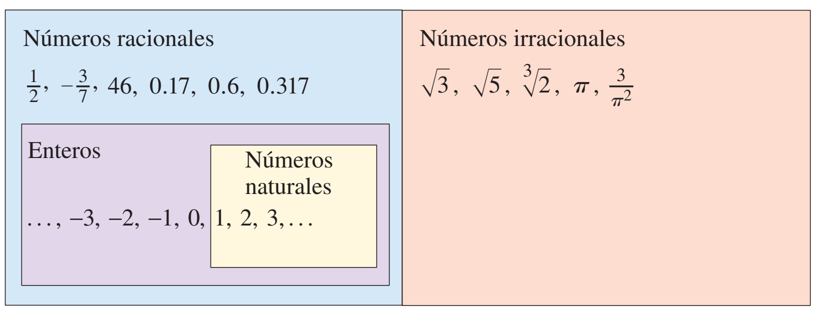



**FIGURA 1** El sistema de números reales

Un número decimal periódico como

$$x = 3.5474747\ldots$$

es un número racional. Para convertirlo a una razón entre dos enteros, escribimos

$$\begin{aligned} 1000x &= 3547.47474747\ldots \\ 10x &= 35.47474747\ldots \\ \hline 990x &= 3512.0 \end{aligned}$$

Por tanto, $x = \frac{3512}{990}$. La idea es multiplicar $x$ por las potencias apropiadas de 10 y luego restar para eliminar la parte periódica.

Todo número real tiene una representación decimal. Si el número es racional, entonces su correspondiente decimal es periódico.

$$\tfrac{1}{2} = 0.5000\ldots = 0.5\overline{0} \qquad \tfrac{2}{3} = 0.66666\ldots = 0.\overline{6}$$

$$\tfrac{157}{495} = 0.3171717\ldots = 0.3\overline{17} \qquad \tfrac{9}{7} = 1.285714285714\ldots = 1.\overline{285714}$$

(La barra indica que la sucesión de dígitos se repite por siempre). Si el número es irracional, la representación decimal no es periódica.

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots \qquad \pi = 3.141592653589793\ldots$$

Si detenemos la expansión decimal de cualquier número en cierto lugar, obtenemos una aproximación al número. Por ejemplo, podemos escribir

$$\pi \approx 3.14159265$$

donde el símbolo $\approx$ se lee "es aproximadamente igual a". Cuantos más lugares decimales retengamos, mejor es nuestra aproximación.

## ▼ Propiedades de los números reales

Todos sabemos que $2 + 3 = 3 + 2$, y $5 + 7 = 7 + 5$, y $513 + 87 = 87 + 513$, etc. En álgebra, expresamos todos estos hechos (un infinito de ellos) si escribimos

$$a + b = b + a$$

donde $a$ y $b$ son dos números cualquiera. En otras palabras, "$a + b = b + a$" es una forma concisa de decir que "cuando sumamos dos números, el orden de adición no importa". Este hecho se conoce como *Propiedad Conmutativa* de la adición. De nuestra experiencia con números sabemos que las siguientes propiedades también son válidas.

### PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

| Propiedades | Ejemplo | Descripción |
|---|---|---|
| **Conmutativas** | | |
| $a + b = b + a$ | $7 + 3 = 3 + 7$ | Cuando sumamos dos números, el orden no importa. |
| $ab = ba$ | $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$ | Cuando multiplicamos dos números, el orden no importa. |
| **Asociativas** | | |
| $(a + b) + c = a + (b + c)$ | $(2 + 4) + 7 = 2 + (4 + 7)$ | Cuando sumamos tres números, no importa cuáles dos de ellos sumamos primero. |
| $(ab)c = a(bc)$ | $(3 \cdot 7) \cdot 5 = 3 \cdot (7 \cdot 5)$ | Cuando multiplicamos tres números, no importa cuáles dos de ellos multiplicamos primero. |
| **Distributivas** | | |
| $a(b + c) = ab + ac$<br>$(b + c)a = ab + ac$ | $2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$<br>$(3 + 5) \cdot 2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$ | Cuando multiplicamos un número por una suma de dos números, obtenemos el mismo resultado si multiplicamos el número por cada uno de los términos y luego sumamos los resultados. |

La Propiedad Distributiva aplica siempre que multiplicamos un número por una suma. La Figura 2 explica por qué funciona esta propiedad para el caso en el que todos los números sean enteros positivos, pero la propiedad es verdadera para cualesquier números reales $a$, $b$ y $c$.

La Propiedad Distributiva es de importancia crítica porque describe la forma en que la adición y la multiplicación interactúan una con otra.

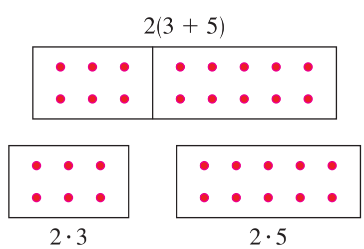



**FIGURA 2** La Propiedad Distributiva

## EJEMPLO 1 | Uso de la Propiedad Distributiva

**(a)** $2(x + 3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3$ — Propiedad Distributiva

$= 2x + 6$ — Simplifique

**(b)** $\underbrace{(a + b)}(x + y) = (a + b)x + (a + b)y$ — Propiedad Distributiva

$= (ax + bx) + (ay + by)$ — Propiedad Distributiva

$= ax + bx + ay + by$ — Propiedad Asociativa de la Adición

En el último paso eliminamos el paréntesis porque, de acuerdo con la Propiedad Asociativa, no importa el orden de la adición.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

## Adición y sustracción

No suponga que $-a$ es un número negativo. Que $-a$ sea negativo o positivo depende del valor de $a$. Por ejemplo, si $a = 5$, entonces $-a = -5$, un número negativo, pero si $a = -5$, entonces $-a = -(-5) = 5$ (Propiedad 2), un número positivo.

El número 0 es especial para la adición; recibe el nombre de **identidad aditiva** porque $a + 0 = a$ para cualquier número real $a$. Todo número real $a$ tiene un **negativo**, $-a$, que satisface $a + (-a) = 0$. La **sustracción** es la operación que deshace a la adición; para sustraer un número de otro, simplemente sumamos el negativo de ese número. Por definición

$$a - b = a + (-b)$$

Para combinar números reales con números negativos, usamos las siguientes propiedades.

### PROPIEDADES DE NEGATIVOS

| Propiedad | Ejemplo |
|---|---|
| **1.** $(-1)a = -a$ | $(-1)5 = -5$ |
| **2.** $-(-a) = a$ | $-(-5) = 5$ |
| **3.** $(-a)b = a(-b) = -(ab)$ | $(-5)7 = 5(-7) = -(5 \cdot 7)$ |
| **4.** $(-a)(-b) = ab$ | $(-4)(-3) = 4 \cdot 3$ |
| **5.** $-(a + b) = -a - b$ | $-(3 + 5) = -3 - 5$ |
| **6.** $-(a - b) = b - a$ | $-(5 - 8) = 8 - 5$ |

La Propiedad 6 expresa el hecho intuitivo de que $a - b$ y $b - a$ son negativos entre sí. La Propiedad 5 se usa a veces con más de dos términos:

$$-(a + b + c) = -a - b - c$$

## EJEMPLO 2 | Uso de las propiedades de los negativos

Sea $x$, $y$ y $z$ números reales.

**(a)** $-(x + 2) = -x - 2$ — Propiedad 5: $-(a + b) = -a - b$

**(b)** $-(x + y - z) = -x - y - (-z)$ — Propiedad 5: $-(a + b) = -a - b$

$= -x - y + z$ — Propiedad 2: $-(-a) = a$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

## Multiplicación y división

El número 1 es especial para la multiplicación; recibe el nombre de **identidad multiplicativa** porque $a \cdot 1 = a$ para cualquier número real $a$. Todo número real $a$ diferente de cero tiene un **recíproco**, $1/a$, que satisface $a \cdot (1/a) = 1$. La **división** es la operación que deshace la multiplicación; para dividir entre un número, multiplicamos por el recíproco de ese número. Si $b \neq 0$, entonces, por definición,

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Escribimos $a \cdot (1/b)$ simplemente como $a/b$. Nos referimos a $a/b$ como el **cociente** entre $a$ y $b$ o como la **fracción** de $a$ sobre $b$; $a$ es el **numerador** y $b$ es el **denominador** (o **divisor**). Para combinar números reales usando la operación de división, usamos las siguientes propiedades.

**PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES**

| Propiedad | Ejemplo | Descripción |
|---|---|---|
| **1.** $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ | $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$ | Para **multiplicar fracciones**, multiplique numeradores y denominadores. |
| **2.** $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ | $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$ | Para **dividir fracciones**, multiplique por el recíproco del divisor. |
| **3.** $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$ | $\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{2 + 7}{5} = \frac{9}{5}$ | Para **sumar fracciones** con el mismo denominador, **sume los numeradores**. |
| **4.** $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ | $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \frac{29}{35}$ | Para **sumar fracciones** con **denominadores diferentes**, encuentre un común denominador y a continuación sume los numeradores. |
| **5.** $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ | $\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$ | **Cancele** números que sean **factores comunes** en numerador y denominador. |
| **6.** Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$ | $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, así que $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$ | **Multiplicación cruzada**. |

Para sumar fracciones con denominadores diferentes, por lo general no usamos la Propiedad 4. En cambio, reescribimos las fracciones de modo que tengan el mínimo denominador común que sea posible (a veces menor que el producto de los denominadores), y luego usamos la Propiedad 3. Este denominador es el **M**ínimo **C**omún **D**enominador (MCD) que se describe en el ejemplo siguiente.

### EJEMPLO 3 | Uso del MCD para sumar fracciones

Evalúe: $\frac{5}{36} + \frac{7}{120}$

**SOLUCIÓN** La factorización de cada denominador en factores primos dará

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad \text{y} \qquad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Encontramos el mínimo común denominador (MCD) al formar el producto de todos los factores presentes en estas factorizaciones, usando la máxima potencia de cada factor.

Entonces el MCD es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Entonces,

$$\frac{5}{36} + \frac{7}{120} = \frac{5 \cdot 10}{36 \cdot 10} + \frac{7 \cdot 3}{120 \cdot 3} \qquad \text{Use común denominador}$$

$$= \frac{50}{360} + \frac{21}{360} = \frac{71}{360} \qquad \text{Propiedad 3: Suma de fracciones con el mismo denominador}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

## La recta real

Los números reales pueden ser representados por puntos sobre una recta, como se muestra en la Figura 3. La dirección positiva (hacia la derecha) está indicada por una flecha. Escogemos un punto de referencia arbitrario $O$, llamado el **origen**, que corresponde al número real 0. Dada cualquier unidad de medida conveniente, cada número positivo $x$ está representado por el punto sobre la recta a una distancia de $x$ unidades a la derecha del origen, y cada número negativo $-x$ está representado por el punto a $x$ unidades a la izquierda del origen. El número asociado con el punto $P$ se llama coordenada de $P$ y la recta se llama **recta coordenada**, o **recta de los números reales**, o simplemente **recta real.** A veces identificamos el punto con su coordenada y consideramos que un número es un punto sobre la recta real.

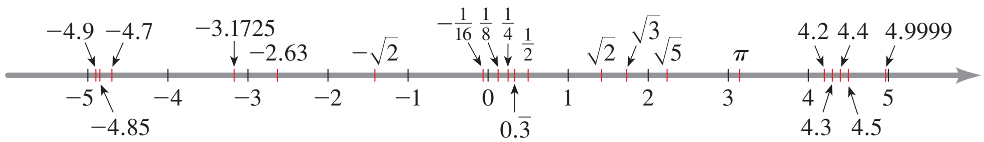



**FIGURA 3** La recta real

Los números reales son *ordenados*. Decimos que ***a* es menor que *b*** y escribimos $a < b$ si $b - a$ es un número positivo. Geométricamente, esto significa que $a$ está a la izquierda de $b$ en la recta numérica, o bien, lo que es lo mismo, podemos decir que ***b* es mayor que *a*** y escribimos $b > a$. El símbolo $a \le b$ (o $b \ge a$) quiere decir que $a < b$ o que $a = b$ y se lee "$a$ es menor o igual a $b$". Por ejemplo, las siguientes son desigualdades verdaderas (vea Figura 4):

$$7 < 7.4 < 7.5 \qquad -\pi < -3 \qquad \sqrt{2} < 2 \qquad 2 \le 2$$

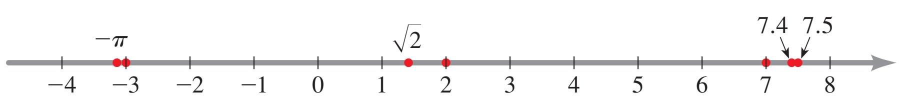



**FIGURA 4**

## Conjuntos e intervalos

Un **conjunto** es una colección de objetos, y estos objetos se llaman **elementos** del conjunto. Si $S$ es un conjunto, la notación $a \in S$ significa que $a$ es un elemento de $S$, y $b \notin S$ quiere decir que $b$ no es un elemento de $S$. Por ejemplo, si $Z$ representa el conjunto de enteros, entonces $-3 \in Z$ pero $\pi \notin Z$.

Algunos conjuntos pueden describirse si se colocan sus elementos dentro de llaves. Por ejemplo, el conjunto $A$ que está formado por todos los enteros positivos menores que 7 se puede escribir como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

También podríamos escribir $A$ en **notación constructiva de conjuntos** como

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero y } 0 < x < 7\}$$

que se lee "$A$ es el conjunto de todas las $x$ tales que $x$ es un entero y $0 < x < 7$".

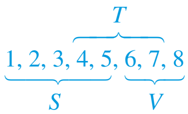
Si $S$ y $T$ son conjuntos, entonces su **unión** $S \cup T$ es el conjunto formado por todos los elementos que están en $S$ o $T$ (o en ambos). La **intersección** de $S$ y $T$ es el conjunto $S \cap T$

formado por todos los elementos que están en $S$ y $T$. En otras palabras, $S \cap T$ es la parte común de $S$ y $T$. El **conjunto vacío**, denotado por $\varnothing$, es el conjunto que no contiene elementos.

## EJEMPLO 4 | Unión e intersección de conjuntos

Si $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{4, 5, 6, 7\}$, y $V = \{6, 7, 8\}$, encuentre los conjuntos $S \cup T$, $S \cap T$ y $S \cap V$.

**SOLUCIÓN**




| | |
|---|---|
| $S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ | Todos los elementos en $S$ o $T$ |
| $S \cap T = \{4, 5\}$ | Elementos comunes a $S$ y $T$ |
| $S \cap V = \varnothing$ | $S$ y $V$ no tienen elementos en común |

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39** ■


**FIGURA 5** El intervalo abierto $(a, b)$


**FIGURA 5** El intervalo cerrado $[a, b]$

Ciertos conjuntos de números reales, llamados **intervalos**, se presentan con frecuencia en cálculo y corresponden geométricamente a segmentos de recta. Si $a < b$, entonces el **intervalo abierto** de $a$ a $b$ está formado por todos los números entre $a$ y $b$ y se denota con $(a, b)$. El **intervalo cerrado** de $a$ a $b$ incluye los puntos extremos y se denota con $[a, b]$. Usando la notación constructiva de conjuntos, podemos escribir

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \qquad [a, b] = \{x \mid a \le x \le b\}$$

Nótese que los paréntesis en la notación de intervalo y círculos abiertos en la gráfica de la Figura 5 indican que los puntos extremos están *excluidos* del intervalo, mientras que los corchetes o paréntesis rectangulares [ ] y los círculos sólidos de la Figura 6 indican que los puntos extremos están *incluidos*. Los intervalos también pueden incluir un punto extremo pero no el otro, o pueden extenderse hasta el infinito en una dirección o en ambas. La tabla siguiente es una lista de posibles tipos de intervalos.

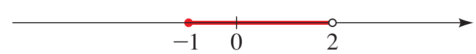
| Notación | Descripción de conjunto | Gráfica |
|---|---|---|
| $(a, b)$ | $\{x \mid a < x < b\}$ |  |
| $[a, b]$ | $\{x \mid a \le x \le b\}$ |  |
| $[a, b)$ | $\{x \mid a \le x < b\}$ |  |
| $(a, b]$ | $\{x \mid a < x \le b\}$ |  |
| $(a, \infty)$ | $\{x \mid a < x\}$ |  |
| $[a, \infty)$ | $\{x \mid a \le x\}$ |  |
| $(-\infty, b)$ | $\{x \mid x < b\}$ |  |
| $(-\infty, b]$ | $\{x \mid x \le b\}$ |  |
| $(-\infty, \infty)$ | $\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales) |  |

El símbolo $\infty$ (infinito) no representa un número. La notación $(a, \infty)$, por ejemplo, simplemente indica que el intervalo no tiene punto extremo a la derecha pero que se prolonga hasta el infinito en la dirección positiva.

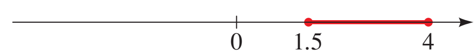
## EJEMPLO 5 | Graficación de intervalos

Exprese cada intervalo en términos de desigualdades y, a continuación, grafique el intervalo.

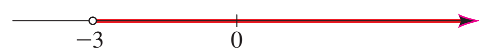
**(a)** $[-1, 2) = \{x \mid -1 \le x < 2\}$




**(b)** $[1.5, 4] = \{x \mid 1.5 \le x \le 4\}$



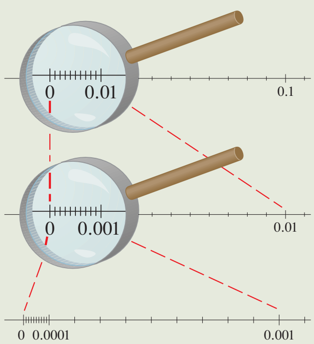

**(c)** $(-3, \infty) = \{x \mid -3 < x\}$




AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45** ■

**No hay número mínimo ni número máximo en un intervalo abierto**

Cualquier intervalo contiene un número infinito de números; cualquier punto en la gráfica de un intervalo corresponde a un número real. En el intervalo cerrado $[0, 1]$, el número mínimo es 0 y el máximo es 1, pero el intervalo abierto $(0, 1)$ no contiene número mínimo o máximo. Para ver esto, observe que 0.01 es cercano a cero, pero 0.001 más cercano, 0.0001 es todavía más cercano, y así sucesivamente. Siempre podemos hallar un número en el intervalo $(0, 1)$ más cercano a cero que cualquier número dado. Como 0 no está en el intervalo, el intervalo no contiene un número mínimo. Del mismo modo, 0.99 es cercano a 1, pero 0.999 es más cercano y 0.9999 es todavía más cercano, y así sucesivamente. Como 1 no está en el intervalo, el intervalo no tiene número máximo.



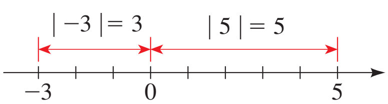




**FIGURA 9**

## EJEMPLO 6 | Hallar uniones e intersecciones de intervalos

Grafique cada conjunto.

**(a)** $(1, 3) \cap [2, 7]$ **(b)** $(1, 3) \cup [2, 7]$

### SOLUCIÓN

**(a)** La intersección de dos intervalos consta de los números que están en ambos intervalos. Por lo tanto,

$$(1, 3) \cap [2, 7] = \{x \mid 1 < x < 3 \text{ y } 2 \le x \le 7\}$$
$$= \{x \mid 2 \le x < 3\} = [2, 3)$$

Este conjunto está ilustrado en la Figura 7.

**(b)** La unión de dos intervalos consta de los números que están en un intervalo o en el otro (o en ambos). Por lo tanto,

$$(1, 3) \cup [2, 7] = \{x \mid 1 < x < 3 \text{ o } 2 \le x \le 7\}$$
$$= \{x \mid 1 < x \le 7\} = (1, 7]$$

Este conjunto está ilustrado en la Figura 8.

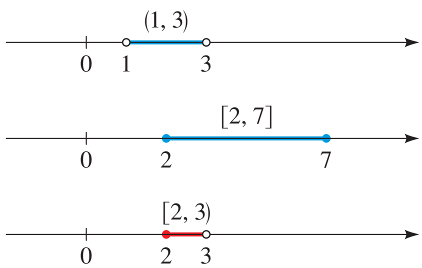



**FIGURA 7** $(1, 3) \cap [2, 7] = [2, 3)$

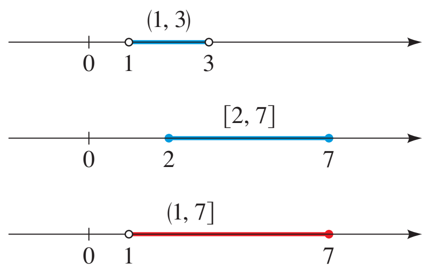



**FIGURA 8** $(1, 3) \cup [2, 7] = (1, 7]$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59** ■

## ▼ Valor absoluto y distancia

El **valor absoluto** de un número $a$, denotado por $|a|$, es la distancia de $a$ a 0 en la recta de números reales (vea Figura 9). La distancia es siempre positiva o cero, de modo que tenemos $|a| \ge 0$ para todo número $a$. Recordando que $-a$ es positivo cuando $a$ es negativo, tenemos la siguiente definición.

> **DEFINICIÓN DE VALOR ABSOLUTO**
>
> Si $a$ es un número real, entonces el **valor absoluto** de $a$ es
>
> $$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \ge 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

## EJEMPLO 7 | Evaluación de valores absolutos de números

**(a)** $|3| = 3$

**(b)** $|-3| = -(-3) = 3$

**(c)** $|0| = 0$

**(d)** $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$ (porque $3 < \pi \Rightarrow 3 - \pi < 0$)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65** ■

Cuando trabajamos con valores absolutos, utilizamos las propiedades siguientes:

### PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

| Propiedad | Ejemplo | Descripción |
|---|---|---|
| **1.** $\lvert a \rvert \geq 0$ | $\lvert -3 \rvert = 3 \geq 0$ | El valor absoluto de un número siempre es positivo o cero. |
| **2.** $\lvert a \rvert = \lvert -a \rvert$ | $\lvert 5 \rvert = \lvert -5 \rvert$ | Un número y su negativo tienen el mismo valor absoluto. |
| **3.** $\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \lvert b \rvert$ | $\lvert -2 \cdot 5 \rvert = \lvert -2 \rvert \lvert 5 \rvert$ | El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos. |
| **4.** $\left\lvert \dfrac{a}{b} \right\rvert = \dfrac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$ | $\left\lvert \dfrac{12}{-3} \right\rvert = \dfrac{\lvert 12 \rvert}{\lvert -3 \rvert}$ | El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos. |

¿Cuál es la distancia sobre la recta real entre los números $-2$ y 11? De la Figura 10 vemos que la distancia es 13. Llegamos a esto si encontramos ya sea $\lvert 11 - (-2) \rvert = 13$ o $\lvert (-2) - 11 \rvert = 13$. De esta observación hacemos la siguiente definición (vea Figura 11).

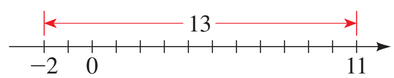



**FIGURA 10**

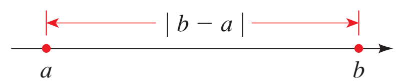



**FIGURA 11** La longitud de un segmento de recta es $\lvert b - a \rvert$

### DISTANCIA ENTRE PUNTOS SOBRE LA RECTA REAL

Si $a$ y $b$ son números reales, entonces la **distancia** entre los puntos $a$ y $b$ sobre la recta real es

$$d(a, b) = \lvert b - a \rvert$$

De la Propiedad 6 de negativos se deduce que

$$\lvert b - a \rvert = \lvert a - b \rvert$$

Esto confirma que, como es de esperarse, la distancia de $a$ a $b$ es la misma distancia de $b$ a $a$.

## EJEMPLO 8 | Distancia entre puntos en la recta real

La distancia entre los números $-8$ y 2 es

$$d(a, b) = \lvert -8 - 2 \rvert = \lvert -10 \rvert = 10$$

Podemos comprobar geométricamente este cálculo, como se ve en la Figura 12.

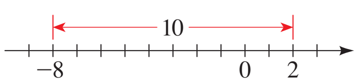



**FIGURA 12**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **73**

# 1.1 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

1. Dé un ejemplo de:
   **(a)** Un número natural
   **(b)** Un entero que no sea número natural
   **(c)** Un número racional que no sea entero
   **(d)** Un número irracional

2. Complete cada enunciado y mencione la propiedad de números reales que haya empleado.
   **(a)** $ab =$ ________; ________ Propiedad
   **(b)** $a + (b + c) =$ ________; ________ Propiedad
   **(c)** $a(b + c) =$ ________; ________ Propiedad

3. El conjunto de números entre 2 y 7, pero que no los incluye, se puede escribir como sigue:
   ________en notación constructiva de conjuntos y
   ________en notación de intervalos.

4. El símbolo $|x|$ representa la _______del número $x$. Si $x$ no es 0, entonces el signo $|x|$ es siempre_______.

## HABILIDADES

**5-6** ■ Mencione los elementos del conjunto dado que sean
   **(a)** números naturales
   **(b)** números enteros
   **(c)** números racionales
   **(d)** números irracionales

**5.** $\{0, -10, 50, \frac{22}{7}, 0.538, \sqrt{7}, 1.2\overline{3}, -\frac{1}{3}, \sqrt[3]{2}\}$

**6.** $\{1.001, 0.333\ldots, -\pi, -11, 11, \frac{13}{15}, \sqrt{16}, 3.14, \frac{15}{3}\}$

**7-14** ■ Exprese la propiedad de los números reales que se use.

**7.** $7 + 10 = 10 + 7$

**8.** $2(3 + 5) = (3 + 5)2$

**9.** $(x + 2y) + 3z = x + (2y + 3z)$

**10.** $2(A + B) = 2A + 2B$

**11.** $(5x + 1)3 = 15x + 3$

**12.** $(x + a)(x + b) = (x + a)x + (x + a)b$

**13.** $2x(3 + y) = (3 + y)2x$

**14.** $7(a + b + c) = 7(a + b) + 7c$

**15-18** ■ Reescriba la expresión usando la propiedad dada de los números reales.

**15.** Propiedad Conmutativa de la adición, $x + 3 =$

**16.** Propiedad Asociativa de la multiplicación, $7(3x) =$

**17.** Propiedad Distributiva, $4(A + B) =$

**18.** Propiedad Distributiva, $5x + 5y =$

**19-24** ■ Use propiedades de números reales para escribir la expresión sin paréntesis.

**19.** $3(x + y)$ **20.** $(a - b)8$

**21.** $4(2m)$ **22.** $\frac{4}{3}(-6y)$

**23.** $-\frac{5}{2}(2x - 4y)$ **24.** $(3a)(b + c - 2d)$

**25-30** ■ Ejecute las operaciones indicadas.

**25.** **(a)** $\frac{3}{10} + \frac{4}{15}$ **(b)** $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

**26.** **(a)** $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$ **(b)** $1 + \frac{5}{8} - \frac{1}{6}$

**27.** **(a)** $\frac{2}{3}(6 - \frac{3}{2})$ **(b)** $0.25(\frac{8}{9} + \frac{1}{2})$

**28.** **(a)** $(3 + \frac{1}{4})(1 - \frac{4}{5})$ **(b)** $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$

**29.** **(a)** $\dfrac{2}{\frac{2}{3}} - \dfrac{\frac{2}{3}}{2}$ **(b)** $\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{9}}$

**30.** **(a)** $\dfrac{2 - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$ **(b)** $\dfrac{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} + \frac{3}{15}}$

**31-32** ■ Ponga el símbolo correcto ($<$, $>$, o $=$) en el espacio.

**31.** **(a)** $3 \quad \frac{7}{2}$ **(b)** $-3 \quad -\frac{7}{2}$ **(c)** $3.5 \quad \frac{7}{2}$

**32.** **(a)** $\frac{2}{3} \quad 0.67$ **(b)** $\frac{2}{3} \quad -0.67$ **(c)** $|0.67| \quad |-0.67|$

**33-36** ■ Diga si cada desigualdad es verdadera o falsa.

**33.** **(a)** $-6 < -10$ **(b)** $\sqrt{2} > 1.41$

**34.** **(a)** $\dfrac{10}{11} < \dfrac{12}{13}$ **(b)** $-\dfrac{1}{2} < -1$

**35.** **(a)** $-\pi > -3$ **(b)** $8 \le 9$

**36.** **(a)** $1.1 > 1.\overline{1}$ **(b)** $8 \le 8$

**37-38** ■ Escriba cada enunciado en términos de desigualdades.

**37.** **(a)** $x$ es positivo
   **(b)** $t$ es menor a 4
   **(c)** $a$ es mayor o igual a $\pi$
   **(d)** $x$ es menor a $\frac{1}{3}$ y mayor a $-5$
   **(e)** La distancia de $p$ a 3 es como máximo 5

**38.** **(a)** $y$ es negativa
   **(b)** $z$ es mayor a 1
   **(c)** $b$ es como máximo 8
   **(d)** $w$ es positiva y menor o igual a 17
   **(e)** $y$ está al menos 2 unidades de $\pi$

**39-42** ■ Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}$$
$$C = \{7, 8, 9, 10\}$$

**39.** **(a)** $A \cup B$ **(b)** $A \cap B$

**40.** **(a)** $B \cup C$ **(b)** $B \cap C$

**41.** **(a)** $A \cup C$ **(b)** $A \cap C$

**42.** **(a)** $A \cup B \cup C$ **(b)** $A \cap B \cap C$

**43-44** ■ Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{x \mid x \geq -2\} \qquad B = \{x \mid x < 4\}$$
$$C = \{x \mid -1 < x \leq 5\}$$

**43.** **(a)** $B \cup C$ **(b)** $B \cap C$

**44.** **(a)** $A \cap C$ **(b)** $A \cap B$

**45-50** ■ Exprese el intervalo en términos de desigualdades y, a continuación, grafique el intervalo.

**45.** $(-3, 0)$ **46.** $(2, 8]$

**47.** $[2, 8)$ **48.** $[-6, -\frac{1}{2}]$

**49.** $[2, \infty)$ **50.** $(-\infty, 1)$

**51-56** ■ Exprese la desigualdad en notación de intervalos y, a continuación, grafique el intervalo correspondiente.

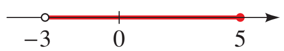
**51.** $x \leq 1$ **52.** $1 \leq x \leq 2$

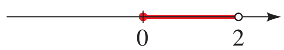
**53.** $-2 < x \leq 1$ **54.** $x \geq -5$

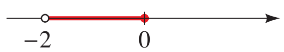
**55.** $x > -1$ **56.** $-5 < x < 2$

**57–58** ■ Exprese cada conjunto en notación de intervalos.

**57.** **(a)** 


**(b)** 


**58.** **(a)** 


**(b)** 


**59-64** ■ Grafique el conjunto.

**59.** $(-2, 0) \cup (-1, 1)$ **60.** $(-2, 0) \cap (-1, 1)$

**61.** $[-4, 6] \cap [0, 8)$ **62.** $[-4, 6) \cup [0, 8)$

**63.** $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$ **64.** $(-\infty, 6] \cap (2, 10)$

**65-70** ■ Evalúe cada expresión.

**65.** **(a)** $|100|$ **(b)** $|-73|$

**66.** **(a)** $|\sqrt{5} - 5|$ **(b)** $|10 - \pi|$

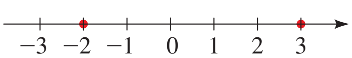
**67.** **(a)** $\big||-6| - |-4|\big|$ **(b)** $\dfrac{-1}{|-1|}$

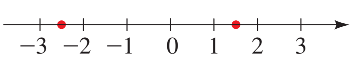
**68.** **(a)** $\big|2 - |-12|\big|$ **(b)** $-1 - \big|1 - |-1|\big|$

**69.** **(a)** $|(-2) \cdot 6|$ **(b)** $|(-\frac{1}{3})(-15)|$

**70.** **(a)** $\left|\dfrac{-6}{24}\right|$ **(b)** $\left|\dfrac{7 - 12}{12 - 7}\right|$

**71-74** ■ Encuentre la distancia entre los números dados.

**71.** 


**72.** 


**73.** **(a)** 2 y 17 **(b)** $-3$ y 21 **(c)** $\frac{11}{8}$ y $-\frac{3}{10}$

**74.** **(a)** $\frac{7}{15}$ y $-\frac{1}{21}$ **(b)** $-38$ y $-57$ **(c)** $-2.6$ y $-1.8$

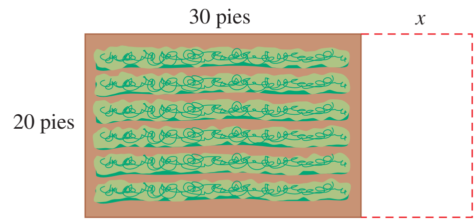
**75-76** ■ Exprese cada decimal periódico como una fracción. (Vea la nota al margen en la página 2.)

**75.** **(a)** $0.\overline{7}$ **(b)** $0.2\overline{8}$ **(c)** $0.\overline{57}$

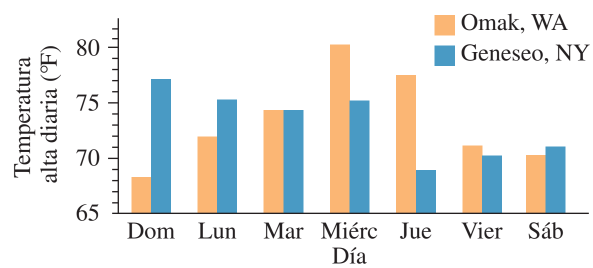
**76.** **(a)** $5.\overline{23}$ **(b)** $1.3\overline{7}$ **(c)** $2.1\overline{35}$

## APLICACIONES

**77. Área de un jardín** El jardín de legumbres de Mary mide 20 pies por 30 pies, de modo que su área es de $20 \times 30 = 600$ pies². Ella decide agrandarlo, como se ve en la figura, para que el área aumente a $A = 20(30 + x)$. ¿Cuál propiedad de los números reales nos dice que la nueva área también se puede escribir como $A = 600 + 20x$?




**78. Variación de temperatura** La gráfica de barras muestra las altas temperaturas diarias para Omak, Washington, y Geneseo, Nueva York, durante cierta semana en junio. Represente con $T_O$ la temperatura en Omak y $T_G$ la temperatura en Geneseo. Calcule $T_O - T_G$ y $|T_O - T_G|$ para cada día que se muestra. ¿Cuál de estos dos valores da más información?

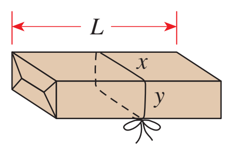


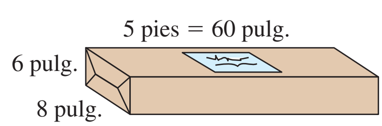

**79. Envío de un paquete por correo** La oficina de correos sólo aceptará paquetes para los cuales la longitud más la circunferencia no sea de más de 108 pulgadas. Así, para el paquete de la figura, debemos tener

$$L + 2(x + y) \leq 108$$

**(a)** ¿La oficina de correos aceptará un paquete de 6 pulgadas de ancho, 8 pulgadas de profundidad y 5 pies de largo? ¿Y un paquete que mida 2 pies por 2 pies por 4 pies?

**(b)** ¿Cuál es la máxima longitud aceptable para un paquete que tiene una base cuadrada que mide 9 pulgadas por 9 pulgadas?



## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**80. Signos de números** Sean $a$, $b$ y $c$ números reales tales que $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$. Encuentre el signo de cada expresión.

**(a)** $-a$ **(b)** $-b$ **(c)** $bc$

**(d)** $a - b$ **(e)** $c - a$ **(f)** $a + bc$

**(g)** $ab + ac$ **(h)** $-abc$ **(i)** $ab^2$

**81. Sumas y productos de números racionales e irracionales** Explique por qué la suma, la diferencia y el producto de dos números irracionales son números racionales. ¿El producto de dos números irracionales necesariamente es irracional? ¿Qué se puede decir de la suma?

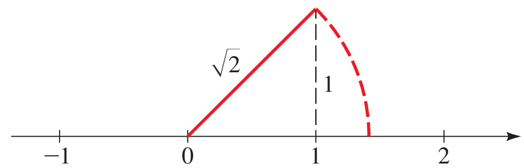
**82. Combinación de números racionales con números irracionales** ¿$\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ es racional o irracional? ¿$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ es racional o irracional? En general, ¿qué se puede decir acerca de la suma de un número racional y un número irracional? ¿Qué se puede decir del producto?

**83. Limitación del comportamiento de recíprocos** Complete las tablas siguientes. ¿Qué ocurre al tamaño de la fracción $1/x$ cuando $x$ crece? ¿Y cuando $x$ disminuye?

| $x$ | $1/x$ |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 10 | |
| 100 | |
| 1000 | |

| $x$ | $1/x$ |
|---|---|
| 1.0 | |
| 0.5 | |
| 0.1 | |
| 0.01 | |
| 0.001 | |

**84. Números irracionales y geometría** Usando la siguiente figura, explique cómo localizar el punto $\sqrt{2}$ en una recta numérica. ¿Puede localizar $\sqrt{5}$ por medio de un método similar? ¿Qué puede decir de $\sqrt{6}$? Haga una lista de otros números irracionales que puedan hallarse de este modo.




**85. Operaciones conmutativa y no conmutativa** Hemos visto que la adición y la multiplicación son operaciones conmutativas.

**(a)** ¿La sustracción es conmutativa?

**(b)** ¿La división de números reales diferentes de cero es conmutativa?

# 1.2 EXPONENTES Y RADICALES

Exponentes enteros (negativos y positivos) ▶ Reglas para trabajar con exponentes ▶ Notación científica ▶ Radicales ▶ Exponentes racionales ▶ Racionalización del denominador

En esta sección damos significado a expresiones como $a^{m/n}$ en las que el exponente $m/n$ es un número racional. Para hacer esto, necesitamos recordar algunos datos acerca de exponentes enteros, radicales y raíces $n$.

## ▼ Exponentes enteros (negativos y positivos)

Normalmente, un producto de números idénticos se escribe en notación exponencial. Por ejemplo, $5 \cdot 5 \cdot 5$ se escribe como $5^3$. En general, tenemos la siguiente definición.

### NOTACIÓN EXPONENCIAL

Si $a$ es cualquier número real y $n$ es un entero positivo, entonces la ***n*-ésima potencia** de $a$ es

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

El número $a$ se denomina **base**, y $n$ se denomina **exponente**.

Observe la distinción entre $(-3)^4$ y $-3^4$. En $(-3)^4$ el exponente se aplica al $-3$, pero en $-3^4$ el exponente se aplica sólo al 3.

## EJEMPLO 1 | Notación exponencial

**(a)** $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$

**(b)** $(-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = 81$

**(c)** $-3^4 = -(3\cdot 3\cdot 3\cdot 3) = -81$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

Podemos expresar varias reglas útiles para trabajar con notación exponencial. Para descubrir la regla para multiplicación, multiplicamos $5^4$ por $5^2$:

$$5^4 \cdot 5^2 = \underbrace{(5\cdot 5\cdot 5\cdot 5)}_{\text{4 factores}}\underbrace{(5\cdot 5)}_{\text{2 factores}} = \underbrace{5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5}_{\text{6 factores}} = 5^6 = 5^{4+2}$$

Es evidente que *para multiplicar dos potencias de la misma base, sumamos sus exponentes.* En general, para cualquier número real $a$ y cualesquier enteros positivos $m$ y $n$, tenemos

$$a^m a^n = \underbrace{(a\cdot a\cdot \cdots \cdot a)}_{m \text{ factores}}\underbrace{(a\cdot a\cdot \cdots \cdot a)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot \cdots \cdot a}_{m+n \text{ factores}} = a^{m+n}$$

Entonces $a^m a^n = a^{m+n}$.

Nos gustaría que esta regla fuera verdadera aun cuando $m$ y $n$ fueran 0 o enteros negativos. Por ejemplo, debemos tener

$$2^0 \cdot 2^3 = 2^{0+3} = 2^3$$

Pero esto puede ocurrir sólo si $2^0 = 1$. Igualmente, deseamos tener

$$5^4 \cdot 5^{-4} = 5^{4+(-4)} = 5^{4-4} = 5^0 = 1$$

y esto será cierto si $5^{-4} = 1/5^4$. Estas observaciones llevan a la siguiente definición.

### EXPONENTES CERO Y NEGATIVOS

Si $a \neq 0$ es cualquier número real y $n$ es un entero positivo, entonces

$$a^0 = 1 \qquad \text{y} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

## EJEMPLO 2 | Exponentes cero y negativos

**(a)** $\left(\frac{4}{7}\right)^0 = 1$

**(b)** $x^{-1} = \dfrac{1}{x^1} = \dfrac{1}{x}$

**(c)** $(-2)^{-3} = \dfrac{1}{(-2)^3} = \dfrac{1}{-8} = -\dfrac{1}{8}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17**

## Reglas para trabajar con exponentes

La familiaridad con las reglas siguientes es esencial para nuestro trabajo con exponentes y bases. En la tabla las bases $a$ y $b$ son números reales, y los exponentes $m$ y $n$ son enteros.

### LEYES DE EXPONENTES

| Ley | Ejemplo | Descripción |
|---|---|---|
| **1.** $a^m a^n = a^{m+n}$ | $3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$ | Para multiplicar dos potencias del mismo número, sume los exponentes. |
| **2.** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ | $\dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$ | Para dividir dos potencias del mismo número, reste los exponentes. |
| **3.** $(a^m)^n = a^{mn}$ | $(3^2)^5 = 3^{2\cdot 5} = 3^{10}$ | Para elevar una potencia a una nueva potencia, multiplique los exponentes. |
| **4.** $(ab)^n = a^n b^n$ | $(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$ | Para elevar un producto a una potencia, eleve cada uno de los factores a la potencia. |
| **5.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ | $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3^2}{4^2}$ | Para elevar un cociente a una potencia, eleve el numerador y el denominador a la potencia. |

**DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 3** Si $m$ y $n$ son enteros positivos, tenemos

$$\begin{aligned}
(a^m)^n &= (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}})^n \\
&= \underbrace{(\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}})(\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}}) \cdots (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}})}_{n \text{ grupos de factores}} \\
&= \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{mn \text{ factores}} = a^{mn}
\end{aligned}$$

Los casos para los que $m \le 0$ o $n \le 0$ se pueden demostrar usando para ello la definición de exponentes negativos. ■

**DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 4** Si $n$ es un entero positivo, tenemos

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab) \cdots (ab)}_{n \text{ factores}} = (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ factores}}) = a^n b^n$$

Aquí hemos empleado repetidamente las Propiedades Conmutativa y Asociativa. Si $n \le 0$, la Ley 4 se puede demostrar usando para ello la definición de exponentes negativos. ■

En el Ejercicio 94 nos piden demostrar las Leyes 2 y 5.

## EJEMPLO 3 | Uso de las Leyes de Exponentes

**(a)** $x^4 x^7 = x^{4+7} = x^{11}$ — Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

**(b)** $y^4 y^{-7} = y^{4-7} = y^{-3} = \dfrac{1}{y^3}$ — Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

**(c)** $\dfrac{c^9}{c^5} = c^{9-5} = c^4$ — Ley 2: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

**(d)** $(b^4)^5 = b^{4\cdot 5} = b^{20}$ — Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$

**(e)** $(3x)^3 = 3^3 x^3 = 27x^3$ — Ley 4: $(ab)^n = a^n b^n$

**(f)** $\left(\dfrac{x}{2}\right)^5 = \dfrac{x^5}{2^5} = \dfrac{x^5}{32}$ — Ley 5: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **35, 37** Y **39** ■

## EJEMPLO 4 | Simplificación de expresiones con exponentes

Simplifique

**(a)** $(2a^3b^2)(3ab^4)^3$ **(b)** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3\left(\dfrac{y^2x}{z}\right)^4$

**SOLUCIÓN**

**(a)**
$$\begin{aligned}
(2a^3b^2)(3ab^4)^3 &= (2a^3b^2)[3^3a^3(b^4)^3] && \text{Ley 4: } (ab)^n = a^nb^n\\
&= (2a^3b^2)(27a^3b^{12}) && \text{Ley 3: } (a^m)^n = a^{mn}\\
&= (2)(27)a^3a^3b^2b^{12} && \text{Agrupe factores de la misma base}\\
&= 54a^6b^{14} && \text{Ley 1: } a^ma^n = a^{m+n}
\end{aligned}$$

**(b)**
$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{y}\right)^3\left(\frac{y^2x}{z}\right)^4 &= \frac{x^3}{y^3}\frac{(y^2)^4x^4}{z^4} && \text{Leyes 5 y 4}\\
&= \frac{x^3}{y^3}\frac{y^8x^4}{z^4} && \text{Ley 3}\\
&= (x^3x^4)\left(\frac{y^8}{y^3}\right)\frac{1}{z^4} && \text{Agrupe factores de la misma base}\\
&= \frac{x^7y^5}{z^4} && \text{Leyes 1 y 2}
\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **43** Y **47** ■

---

Cuando simplifique una expresión, encontrará que muchos métodos diferentes llevarán al mismo resultado; siéntase libre de usar cualquiera de las reglas de exponentes para llegar a su propio método. A continuación damos dos leyes adicionales que son útiles en la simplificación de expresiones con exponentes negativos.

### LEYES DE EXPONENTES

| Ley | Ejemplo | Descripción |
|---|---|---|
| **6.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ | $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2$ | Para elevar una fracción a una potencia negativa, invierta la fracción y cambie el signo del exponente. |
| **7.** $\dfrac{a^{-n}}{b^{-m}} = \dfrac{b^m}{a^n}$ | $\dfrac{3^{-2}}{4^{-5}} = \dfrac{4^5}{3^2}$ | Para pasar un número elevado a una potencia del numerador al denominador o del denominador al numerador, cambie el signo del exponente. |

**DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 7** Usando la definición de exponentes negativos y luego la Propiedad 2 de fracciones (página 5), tenemos

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{1/a^n}{1/b^m} = \frac{1}{a^n}\cdot\frac{b^m}{1} = \frac{b^m}{a^n}$$ ■

---

En el Ejercicio 94 nos piden demostrar la Ley 6.

## EJEMPLO 5 | Simplificación de expresiones con exponentes negativos

Elimine exponentes negativos y simplifique cada expresión.

**(a)** $\dfrac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2}$ **(b)** $\left(\dfrac{y}{3z^3}\right)^{-2}$

**LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO**

Aun cuando no observamos su presencia, las matemáticas permean casi todos los aspectos de la vida en el mundo moderno. Con el advenimiento de la moderna tecnología, las matemáticas desempeñan una función cada vez más grande en nuestras vidas. Hoy en día es probable que alguien sea despertado por un reloj de alarma digital, hizo una llamada telefónica con transmisión digital, envió un mensaje de e-mail en la Internet, manejó un auto con inyección controlada digitalmente, escuchó música en un reproductor de CD o MP3, quizá vio televisión digital o un DVD, luego durmió en una habitación cuya temperatura estaba controlada por un termostato digital. En cada una de estas actividades, las matemáticas intervienen en forma decisiva. En general, una propiedad, como por ejemplo la intensidad o frecuencia del sonido, el nivel de oxígeno en la emisión del escape de un auto, los colores en una imagen, o la temperatura de una habitación, son transformados en sucesiones de números por refinados algoritmos matemáticos. Estos datos numéricos, que suelen estar formados por muchos millones de bits (los dígitos 0 y 1), son transmitidos y reinterpretados. Trabajar con estas cantidades enormes de datos no fue posible sino hasta la invención de computadoras, máquinas cuyos procesos lógicos fueron inventados por matemáticos.

Las aportaciones de las matemáticas en el mundo moderno no están limitadas a avances tecnológicos. Los procesos lógicos de las matemáticas se emplean ahora para analizar complejos problemas en ciencias sociales, políticas y biológicas en formas nuevas y sorprendentes. Los avances en matemáticas continúan y, algunos de los más emocionantes, se dieron tan sólo en la década pasada.

En otro libro, llamado *Mathematics in the Modern World*, describiremos con más detalle el modo en que las matemáticas influyen en nuestras actividades diarias.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Usamos la Ley 7, que nos permite pasar un número elevado a una potencia del numerador al denominador (o viceversa) cambiando el signo del exponente.

$t^{-4}$ pasa al denominador y se convierte en $t^4$

$$\frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2} = \frac{6ss^2}{2t^2t^4} \qquad \text{Ley 7}$$

$s^{-2}$ pasa al numerador y se convierte en $s^2$

$$= \frac{3s^3}{t^6} \qquad \text{Ley 1}$$

**(b)** Usamos la Ley 6, que nos permite cambiar el signo del exponente de una fracción al invertir la fracción.

$$\left(\frac{y}{3z^3}\right)^{-2} = \left(\frac{3z^3}{y}\right)^2 \qquad \text{Ley 6}$$

$$= \frac{9z^6}{y^2} \qquad \text{Leyes 5 y 4}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **49**

## Notación científica

Los científicos usan notación exponencial como una forma compacta de escribir números muy grandes y números muy pequeños. Por ejemplo, la estrella más cercana además del Sol, Proxima Centauri, está aproximadamente a 40,000,000,000,000 de km de distancia. La masa del átomo de hidrógeno es alrededor de 0.00000000000000000000000166 g. Estos números son difíciles de leer y escribir, de modo que los científicos por lo general los expresan en *notación científica*.

**NOTACIÓN CIENTÍFICA**

Se dice que un número positivo $x$ está escrito en **notación científica** si está expresado como sigue:

$$x = a \times 10^n \qquad \text{donde } 1 \le a < 10 \text{ y } n \text{ es un entero}$$

Por ejemplo, cuando decimos que la distancia a la estrella Proxima Centauri es $4 \times 10^{13}$ km, el exponente positivo 13 indica que el punto decimal debe recorrerse 13 lugares a la *derecha:*

$$4 \times 10^{13} = 40{,}000{,}000{,}000{,}000$$

Mueva el punto decimal 13 lugares a la derecha

Cuando decimos que la masa de un átomo de hidrógeno es $1.66 \times 10^{-24}$ g, el exponente $-24$ indica que el punto decimal debe moverse 24 lugares a la *izquierda:*

$$1.66 \times 10^{-24} = 0.00000000000000000000000166$$

Mueva el punto decimal 24 lugares a la izquierda

## EJEMPLO 6 | Cambio de notación decimal a científica

En notación científica, escriba cada uno de los números siguientes.

**(a)** 56,920 **(b)** 0.000093

**SOLUCIÓN**

**(a)** $\underbrace{56{,}920}_{\text{4 lugares}} = 5.692 \times 10^4$ **(b)** $0.\underbrace{000093}_{\text{5 lugares}} = 9.3 \times 10^{-5}$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **77** Y **79**

Para usar notación científica en una calculadora, presione la tecla marcada EE o EXP o EEX para ingresar el exponente. Por ejemplo, para ingresar el número $3.629 \times 10^{15}$ en una calculadora TI-83, ingresamos

3.629 2ND EE 15

y en la pantalla se lee

3.629E15

Con frecuencia se usa notación científica en una calculadora para ver un número muy grande o uno muy pequeño. Por ejemplo, si usamos calculadora para elevar al cuadrado el número 1,111,111, la pantalla puede exhibir (dependiendo del modelo de calculadora) la aproximación

1.234568 12 o 1.23468 E12

Aquí los dígitos finales indican la potencia de 10 e interpretamos el resultado como

$$1.234568 \times 10^{12}$$

## EJEMPLO 7 | Cálculo con notación científica

Si $a \approx 0.00046$, $b \approx 1.697 \times 10^{22}$, y $c \approx 2.91 \times 10^{-18}$, use calculadora para aproximar el cociente $ab/c$.

**SOLUCIÓN** Podríamos ingresar los datos usando notación científica, o bien, podríamos usar leyes de exponentes como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{ab}{c} &\approx \frac{(4.6 \times 10^{-4})(1.697 \times 10^{22})}{2.91 \times 10^{-18}}\\ &= \frac{(4.6)(1.697)}{2.91} \times 10^{-4+22+18}\\ &\approx 2.7 \times 10^{36}\end{aligned}$$

En el Apéndice *Cálculo de cifras significativas* vea guías para trabajar con cifras significativas.

Expresamos la respuesta redondeada a dos cifras significativas porque el menos preciso de los números dados se expresa a dos cifras significativas.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **83** Y **85**

## Radicales

Sabemos lo que $2^n$ significa siempre que $n$ sea un entero. Para dar significado a una potencia, por ejemplo $2^{4/5}$, cuyo exponente es un número racional, necesitamos estudiar radicales.

El símbolo $\sqrt{\phantom{x}}$ significa "la raíz positiva de". Entonces

$$\sqrt{a} = b \quad \text{significa que} \quad b^2 = a \quad \text{y} \quad b \geq 0$$

Es cierto que el número 9 tiene dos raíces cuadradas, 3 y $-3$, pero la notación $\sqrt{9}$ está reservada para la raíz cuadrada *positiva* de 9 (a veces llamada *raíz cuadrada principal* de 9). Si deseamos tener la raíz negativa, debemos escribir $-\sqrt{9}$, que es $-3$.

Como $a = b^2 \geq 0$, el símbolo $\sqrt{a}$ tiene sentido sólo cuando $a \geq 0$. Por ejemplo,

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{porque} \quad 3^2 = 9 \quad \text{y} \quad 3 \geq 0$$

Las raíces cuadradas son casos especiales de las raíces $n$. La raíz $n$ de $x$ es el número que, cuando se eleva a la $n$ potencia, dará $x$.

### DEFINICIÓN DE UNA RAÍZ *n*

Si $n$ es cualquier entero positivo, entonces la **raíz *n* principal** de $a$ se define como sigue:

$$\sqrt[n]{a} = b \qquad \text{significa que } b^n = a$$

Si $n$ es par, debemos tener $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Por lo tanto,

$$\sqrt[4]{81} = 3 \qquad \text{porque} \qquad 3^4 = 81 \qquad \text{y} \qquad 3 \geq 0$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \qquad \text{porque} \qquad (-2)^3 = -8$$

Pero $\sqrt{-8}$, $\sqrt[4]{-8}$ y $\sqrt[6]{-8}$ no están definidas. (Por ejemplo, $\sqrt{-8}$ no está definida porque el cuadrado de todo número real es no negativo.)

Nótese que

$$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{pero} \qquad \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = |-4|$$

Entonces la ecuación $\sqrt{a^2} = a$ no siempre es verdadera; lo es sólo cuando $a \geq 0$. No obstante, siempre podemos escribir $\sqrt{a^2} = |a|$. Esta última ecuación es verdadera no sólo para raíces cuadradas, sino para cualquier raíz par. Ésta y otras reglas empleadas para trabajar con raíces $n$ se citan en el recuadro siguiente. En cada propiedad suponemos que existen todas las raíces dadas.

### PROPIEDADES DE RAÍCES *n*

| Propiedad | Ejemplo |
|---|---|
| **1.** $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ | $\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$ |
| **2.** $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ | $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{2}{3}$ |
| **3.** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ | $\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$ |
| **4.** $\sqrt[n]{a^n} = a$ si $n$ es impar | $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5, \quad \sqrt[5]{2^5} = 2$ |
| **5.** $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ si $n$ es par | $\sqrt[4]{(-3)^4} = \lvert -3 \rvert = 3$ |

## EJEMPLO 8 | Simplificación de expresiones con raíces *n*

**(a)**

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^4} &= \sqrt[3]{x^3x} && \text{Factorice el cubo más grande} \\ &= \sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{x} && \text{Propiedad 1: } \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} \\ &= x\sqrt[3]{x} && \text{Propiedad 4: } \sqrt[3]{a^3} = a \end{aligned}$$

**(b)**

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{81x^8y^4} &= \sqrt[4]{81}\sqrt[4]{x^8}\sqrt[4]{y^4} && \text{Propiedad 1: } \sqrt[4]{abc} = \sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}\sqrt[4]{c} \\ &= 3\sqrt[4]{(x^2)^4}\,|y| && \text{Propiedad 5: } \sqrt[4]{a^4} = |a| \\ &= 3x^2|y| && \text{Propiedad 5: } \sqrt[4]{a^4} = |a|,\ |x^2| = x^2 \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **55** Y **57**

Con frecuencia es útil combinar radicales semejantes en una expresión, por ejemplo $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$. Esto se puede hacer usando la Propiedad Distributiva. Así,

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2 + 5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

El siguiente ejemplo ilustra más aún este proceso.

Evite el siguiente error:

$$\sqrt{a+b} \cancel{=} \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Por ejemplo, si hacemos $a = 9$ y $b = 16$, entonces vemos el error:

$$\sqrt{9+16} \stackrel{?}{=} \sqrt{9} + \sqrt{16}$$

$$\sqrt{25} \stackrel{?}{=} 3 + 4$$

$$5 \stackrel{?}{=} 7 \quad \text{Error!}$$

### EJEMPLO 9 | Combinación de radicales

**(a)** $\sqrt{32} + \sqrt{200} = \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{100 \cdot 2}$ — Factorice los cuadrados más grandes

$= \sqrt{16}\sqrt{2} + \sqrt{100}\sqrt{2}$ — Propiedad 1: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$= 4\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$ — Propiedad Distributiva

**(b)** Si $b > 0$, entonces

$\sqrt{25b} - \sqrt{b^3} = \sqrt{25}\sqrt{b} - \sqrt{b^2}\sqrt{b}$ — Propiedad 1: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$= 5\sqrt{b} - b\sqrt{b}$ — Propiedad 5, $b > 0$

$= (5 - b)\sqrt{b}$ — Propiedad Distributiva

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **29** Y **33**

## Exponentes racionales

Para definir lo que significa *exponente racional*, o bien, lo que es lo mismo, un *exponente fraccionario*, como por ejemplo $a^{1/3}$, necesitamos usar radicales. Para dar significado al símbolo $a^{1/n}$ de forma que sea consistente con las Leyes de Exponentes, tendríamos que tener

$$(a^{1/n})^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

Entonces, por la definición de la raíz $n$,

$$\boxed{a^{1/n} = \sqrt[n]{a}}$$

En general, definimos exponentes racionales como sigue:

**DEFINICIÓN DE EXPONENTES RACIONALES**

Para cualquier exponente racional $m/n$ en sus términos más elementales, donde $m$ y $n$ son enteros y $n > 0$, definimos

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \text{o lo que es equivalente} \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si $n$ es par, entonces requerimos que $a \geq 0$.

Con esta definición se puede demostrar que *las Leyes de Exponentes también se cumplen para exponentes racionales.*

### EJEMPLO 10 | Uso de la definición de exponentes racionales

**(a)** $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$

**(b)** $8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ — Solución alternativa: $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

**(c)** $125^{-1/3} = \dfrac{1}{125^{1/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{1}{5}$

**(d)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \dfrac{1}{x^{4/3}} = x^{-4/3}$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **21** Y **23**

**DIOFANTO** Vivió en Alejandría hacia el año 250 d.C. Su libro *Arithmetica* es considerado el primer libro de álgebra donde da métodos para hallar soluciones enteras de ecuaciones algebraicas. *Arithmetica* fue leído y estudiado durante más de mil años. Fermat (vea página 99) hizo algunos de sus más importantes descubrimientos cuando estudiaba este libro. La mayor aportación de Diofanto es el uso de símbolos para representar las incógnitas en un problema. Aun cuando su simbolismo no es tan sencillo como el que usamos ahora, fue un avance considerable para escribir todo en palabras. En la notación de Diofanto, la ecuación

$$x^5 - 7x^2 + 8x - 5 = 24$$

se escribe

$$\Delta K^{\gamma}\alpha\, \varsigma\eta \pitchfork \Delta^{\gamma}\zeta \overset{\circ}{M}\varepsilon\iota^{\sigma}\kappa\delta$$

Nuestra moderna notación algebraica no entró en uso común sino hasta el siglo XVII.

## EJEMPLO 11 | Uso de las leyes de exponentes con exponentes racionales

**(a)** $a^{1/3}a^{7/3} = a^{8/3}$ — Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

**(b)** $\dfrac{a^{2/5}a^{7/5}}{a^{3/5}} = a^{2/5+7/5-3/5} = a^{6/5}$ — Ley 1, Ley 2: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

**(c)**

$$\begin{aligned}(2a^3b^4)^{3/2} &= 2^{3/2}(a^3)^{3/2}(b^4)^{3/2} && \text{Ley 4: } (abc)^n = a^n b^n c^n\\ &= (\sqrt{2})^3 a^{3(3/2)}b^{4(3/2)} && \text{Ley 3: } (a^m)^n = a^{mn}\\ &= 2\sqrt{2}a^{9/2}b^6\end{aligned}$$

**(d)**

$$\begin{aligned}\left(\frac{2x^{3/4}}{y^{1/3}}\right)^3\left(\frac{y^4}{x^{-1/2}}\right) &= \frac{2^3(x^{3/4})^3}{(y^{1/3})^3}\cdot(y^4x^{1/2}) && \text{Leyes 5, 4 y 7}\\ &= \frac{8x^{9/4}}{y}\cdot y^4x^{1/2} && \text{Ley 3}\\ &= 8x^{11/4}y^3 && \text{Leyes 1 y 2}\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **61, 63, 67** Y **69**

## EJEMPLO 12 | Simplificación al escribir radicales como exponentes racionales

**(a)**

$$\begin{aligned}(2\sqrt{x})(3\sqrt[3]{x}) &= (2x^{1/2})(3x^{1/3}) && \text{Definición de exponentes racionales}\\ &= 6x^{1/2+1/3} = 6x^{5/6} && \text{Ley 1}\end{aligned}$$

**(b)**

$$\begin{aligned}\sqrt{x\sqrt{x}} &= (xx^{1/2})^{1/2} && \text{Definición de exponentes racionales}\\ &= (x^{3/2})^{1/2} && \text{Ley 1}\\ &= x^{3/4} && \text{Ley 3}\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **71** Y **75**

## Racionalización del denominador

A veces es útil eliminar el radical en un denominador al multiplicar el numerador y el denominador por una expresión apropiada. Este procedimiento se denomina **racionalización del denominador.** Si el denominador es de la forma $\sqrt{a}$, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{a}$. Al hacer esto multiplicamos por 1 la cantidad dada, de modo que no cambiamos su valor. Por ejemplo,

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Nótese que el denominador de la última fracción no contiene radical. En general, si el denominador es de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$, entonces multiplicar el numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ racionalizará el denominador, porque (para $a > 0$)

$$\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

## EJEMPLO 13 | Racionalización de denominadores

Esto es igual a 1

**(a)** $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

**(b)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$

**(c)** $\sqrt[7]{\dfrac{1}{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}}\dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^5}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^7}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{a}$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **89** Y **91**

## 1.2 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. **(a)** Usando notación exponencial, podemos escribir el producto $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ como ______.
   **(b)** En la expresión $3^4$, el número 3 se denomina______, y el número 4 se llama______.
2. **(a)** Cuando multiplicamos dos potencias con la misma base, ______ los exponentes. Por tanto, $3^4 \cdot 3^5 =$ ______.
   **(b)** Cuando dividimos dos potencias con la misma base, ______ los exponentes. Por tanto, $\dfrac{3^5}{3^2} =$ ______.
3. **(a)** Usando notación exponencial, podemos escribir $\sqrt[3]{5}$ como ______.
   **(b)** Usando radicales, podemos escribir $5^{1/2}$ como ______.
   **(c)** ¿Hay diferencia entre $\sqrt{5^2}$ y $(\sqrt{5})^2$? Explique.
4. Explique qué significa $4^{3/2}$ y, a continuación, calcule $4^{3/2}$ en dos formas diferentes:
   $(4^{1/2})^{\square} =$ ________ o $(4^3)^{\square} =$ ________
5. Explique cómo racionalizar un denominador y luego complete los siguientes pasos para racionalizar $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$:
   $$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$
6. Encuentre la potencia faltante en el siguiente cálculo: $5^{1/3} \cdot 5^{\square} = 5$.

### HABILIDADES

**7-14** ■ Escriba cada expresión radical usando exponentes, y cada expresión exponencial usando radicales.

| | Expresión radical | Expresión exponencial |
|---|---|---|
| 7. | $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ | |
| 8. | $\sqrt[3]{7^2}$ | |
| 9. | | $4^{2/3}$ |
| 10. | | $11^{-3/2}$ |
| 11. | $\sqrt[5]{5^3}$ | |
| 12. | | $2^{-1.5}$ |
| 13. | | $a^{2/5}$ |
| 14. | $\dfrac{1}{\sqrt{x^5}}$ | |

**15-24** ■ Evalúe cada expresión.

15. **(a)** $-3^2$ **(b)** $(-3)^2$ **(c)** $(\frac{1}{3})^4(-3)^2$
16. **(a)** $5^4 \cdot 5^{-2}$ **(b)** $\dfrac{10^7}{10^4}$ **(c)** $\dfrac{3}{3^{-2}}$
17. **(a)** $(\frac{5}{3})^0 2^{-1}$ **(b)** $\dfrac{2^{-3}}{3^0}$ **(c)** $(\frac{1}{4})^{-2}$
18. **(a)** $(-\frac{2}{3})^{-3}$ **(b)** $(\frac{3}{2})^{-2} \cdot \frac{9}{16}$ **(c)** $(\frac{1}{2})^4 \cdot (\frac{5}{2})^{-2}$
19. **(a)** $\sqrt{16}$ **(b)** $\sqrt[4]{16}$ **(c)** $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$
20. **(a)** $\sqrt{64}$ **(b)** $\sqrt[3]{-64}$ **(c)** $\sqrt[5]{-32}$
21. **(a)** $\sqrt{\frac{4}{9}}$ **(b)** $\sqrt[4]{256}$ **(c)** $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$
22. **(a)** $\sqrt{7}\sqrt{28}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ **(c)** $\sqrt[4]{24}\sqrt[4]{54}$
23. **(a)** $(\frac{4}{9})^{-1/2}$ **(b)** $(-32)^{2/5}$ **(c)** $-32^{2/5}$
24. **(a)** $1024^{-0.1}$ **(b)** $(-\frac{27}{8})^{2/3}$ **(c)** $(\frac{25}{64})^{-3/2}$

**25-28** ■ Evalúe la expresión usando $x = 3$, $y = 4$ y $z = -1$.

25. $\sqrt{x^2 + y^2}$
26. $\sqrt[4]{x^3 + 14y + 2z}$
27. $(9x)^{2/3} + (2y)^{2/3} + z^{2/3}$
28. $(xy)^{2z}$

**29-34** ■ Simplifique la expresión.

29. $\sqrt{32} + \sqrt{18}$
30. $\sqrt{75} + \sqrt{48}$
31. $\sqrt[5]{96} + \sqrt[5]{3}$
32. $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3}$
33. $\sqrt{16x} + \sqrt{x^5}$
34. $\sqrt[3]{2y^4} - \sqrt[3]{y}$

**35-40** ■ Simplifique cada expresión.

35. **(a)** $x^8x^2$ **(b)** $(3y^2)(4y^5)$ **(c)** $x^2x^{-6}$
36. **(a)** $x^{-5}x^3$ **(b)** $w^{-2}w^{-4}w^6$ **(c)** $z^5z^{-3}z^{-4}$
37. **(a)** $\dfrac{y^{10}y^0}{y^7}$ **(b)** $\dfrac{x^6}{x^{10}}$ **(c)** $\dfrac{a^9a^{-2}}{a}$
38. **(a)** $\dfrac{z^2z^4}{z^3z^{-1}}$ **(b)** $(2y^2)^3$ **(c)** $(8x)^2$

**39.** **(a)** $(a^2a^4)^3$ **(b)** $\left(\dfrac{a^2}{4}\right)^3$ **(c)** $(3z)^2(6z^2)^{-3}$

**40.** **(a)** $(2z^2)^{-5}z^{10}$ **(b)** $(2a^3a^2)^4$ **(c)** $\left(\dfrac{3x^4}{4x^2}\right)^2$

**41-52** ■ Simplifique la expresión y elimine cualquier exponente(s) negativo(s).

**41.** **(a)** $(4x^2y^4)(2x^5y)$ **(b)** $(8a^2z)(\frac{1}{2}a^3z^4)$

**42.** **(a)** $b^4(3ab^3)(2a^2b^{-5})$ **(b)** $(2s^3t^{-2})(\frac{1}{4}s^7t)(16t^4)$

**43.** **(a)** $(5x^2y^3)(3x^2y^5)^4$ **(b)** $(2a^3b^2)^2(5a^2b^5)^3$

**44.** **(a)** $(s^{-2}t^2)^2(s^2t)^3$ **(b)** $(2u^2v^3)^3(3u^{-3}v)^2$

**45.** **(a)** $\dfrac{6y^3z}{2yz^2}$ **(b)** $\dfrac{(xy^2z^3)^4}{(x^2y^2z)^3}$

**46.** **(a)** $\dfrac{2x^3y^4}{x^5y^3}$ **(b)** $\dfrac{(2v^3w)^2}{v^3w^2}$

**47.** **(a)** $\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^5\left(\dfrac{a^3b^2}{c^3}\right)^3$ **(b)** $\dfrac{(u^{-1}v^2)^2}{(u^3v^{-2})^3}$

**48.** **(a)** $\left(\dfrac{x^4z^2}{4y^5}\right)\left(\dfrac{2x^3y^2}{z^3}\right)^2$ **(b)** $\dfrac{(rs^2)^3}{(r^{-3}s^2)^2}$

**49.** **(a)** $\dfrac{8a^3b^{-4}}{2a^{-5}b^5}$ **(b)** $\left(\dfrac{y}{5x^{-2}}\right)^{-3}$

**50.** **(a)** $\dfrac{5xy^{-2}}{x^{-1}y^{-3}}$ **(b)** $\left(\dfrac{2a^{-1}b}{a^2b^{-3}}\right)^{-3}$

**51.** **(a)** $\left(\dfrac{3a}{b^3}\right)^{-1}$ **(b)** $\left(\dfrac{q^{-1}r^{-1}s^{-2}}{r^{-5}sq^{-8}}\right)^{-1}$

**52.** **(a)** $\left(\dfrac{s^2t^{-4}}{5s^{-1}t}\right)$ **(b)** $\left(\dfrac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2y^3z^{-4}}\right)^{-3}$

**53-60** ■ Simplifique la expresión. Suponga que las letras denotan cualesquier números reales.

**53.** $\sqrt[4]{x^4}$ **54.** $\sqrt[5]{x^{10}}$

**55.** $\sqrt[4]{16x^8}$ **56.** $\sqrt[3]{x^3y^6}$

**57.** $\sqrt[6]{64a^6b^7}$ **58.** $\sqrt[3]{a^2b}\sqrt[3]{64a^4b}$

**59.** $\sqrt[3]{\sqrt{64x^6}}$ **60.** $\sqrt[4]{x^4y^2z^2}$

**61-70** ■ Simplifique la expresión y elimine cualesquier exponente(s) negativo(s). Suponga que todas las letras denotan números positivos.

**61.** **(a)** $x^{3/4}x^{5/4}$ **(b)** $y^{2/3}y^{4/3}$

**62.** **(a)** $(4b)^{1/2}(8b^{1/4})$ **(b)** $(3a^{3/4})^2(5a^{1/2})$

**63.** **(a)** $\dfrac{w^{4/3}w^{2/3}}{w^{1/3}}$ **(b)** $\dfrac{s^{5/2}(2s^{5/4})^2}{s^{1/2}}$

**64.** **(a)** $(8y^3)^{-2/3}$ **(b)** $(u^4v^6)^{-1/3}$

**65.** **(a)** $(8a^6b^{3/2})^{2/3}$ **(b)** $(4a^6b^8)^{3/2}$

**66.** **(a)** $(x^{-5}y^{1/3})^{-3/5}$ **(b)** $(2x^3y^{-1/4})^2(8y^{-3/2})^{-1/3}$

**67.** **(a)** $\dfrac{(8s^3t^3)^{2/3}}{(s^4t^{-8})^{1/4}}$ **(b)** $\dfrac{(32y^{-5}z^{10})^{1/5}}{(64y^6z^{-12})^{-1/6}}$

**68.** **(a)** $\left(\dfrac{x^8y^{-4}}{16y^{4/3}}\right)^{-1/4}$ **(b)** $\left(\dfrac{-8y^{3/4}}{y^3z^6}\right)^{-1/3}$

**69.** **(a)** $\left(\dfrac{x^{-2/3}}{y^{1/2}}\right)\left(\dfrac{x^{-2}}{y^{-3}}\right)^{1/6}$ **(b)** $\left(\dfrac{4y^3z^{2/3}}{x^{1/2}}\right)^2\left(\dfrac{x^{-3}y^6}{8z^4}\right)^{1/3}$

**70.** **(a)** $\left(\dfrac{a^{1/6}b^{-3}}{x^{-1}y}\right)^3\left(\dfrac{x^{-2}b^{-1}}{a^{3/2}y^{1/3}}\right)$ **(b)** $\dfrac{(9st)^{3/2}}{(27s^3t^{-4})^{2/3}}\left(\dfrac{3s^{-2}}{4t^{1/3}}\right)^{-1}$

**71-76** ■ Simplifique la expresión y elimine cualesquier exponente(s) negativo(s). Suponga que todas las letras denotan números positivos.

**71.** **(a)** $\sqrt[6]{y^5}\sqrt[3]{y^2}$ **(b)** $(5\sqrt[3]{x})(2\sqrt[4]{x})$

**72.** **(a)** $\sqrt[4]{b^3}\sqrt{b}$ **(b)** $(2\sqrt{a})(\sqrt[3]{a^2})$

**73.** **(a)** $\sqrt{4st^3}\sqrt[6]{s^3t^2}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[4]{x^3}}$

**74.** **(a)** $\sqrt[5]{x^3y^2}\sqrt[10]{x^4y^{16}}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt[3]{8x^2}}{\sqrt{x}}$

**75.** **(a)** $\sqrt[3]{y\sqrt{y}}$ **(b)** $\sqrt{\dfrac{16u^3v}{uv^5}}$

**76.** **(a)** $\sqrt{s\sqrt{s^3}}$ **(b)** $\sqrt[3]{\dfrac{54x^2y^4}{2x^5y}}$

**77-78** ■ Escriba cada número en notación científica.

**77.** **(a)** 69,300,000 **(b)** 7,200,000,000,000
**(c)** 0.000028536 **(d)** 0.0001213

**78.** **(a)** 129,540,000 **(b)** 7,259,000,000
**(c)** 0.0000000014 **(d)** 0.0007029

**79-80** ■ Escriba cada número en notación decimal.

**79.** **(a)** $3.19 \times 10^5$ **(b)** $2.721 \times 10^8$
**(c)** $2.670 \times 10^{-8}$ **(d)** $9.999 \times 10^{-9}$

**80.** **(a)** $7.1 \times 10^{14}$ **(b)** $6 \times 10^{12}$
**(c)** $8.55 \times 10^{-3}$ **(d)** $6.257 \times 10^{-10}$

**81-82** ■ Escriba en notación científica el número indicado en cada enunciado.

**81.** **(a)** Un año luz, la distancia que recorre la luz en un año, es alrededor de 5,900,000,000,000 millas.

**(b)** El diámetro de un electrón alrededor de 0.0000000000004 centímetros.

**(c)** Una gota de agua contiene más de 33 trillones de moléculas.

**82.** **(a)** La distancia de la Tierra al Sol es de unos 93 millones de millas.

**(b)** La masa de una molécula de oxígeno es de unos 0.000000000000000000000053 g.

**(c)** La masa de la Tierra es de unos 5,970,000,000,000,000,000,000,000 kg.

**83-88** ■ Use notación científica, las Leyes de Exponentes, y una calculadora para ejecutar las operaciones indicadas. Exprese su respuesta redondeada al número de dígitos significativos indicados por los datos dados.

**83.** $(7.2 \times 10^{-9})(1.806 \times 10^{-12})$

**84.** $(1.062 \times 10^{24})(8.61 \times 10^{19})$

**85.** $\dfrac{1.295643 \times 10^{9}}{(3.610 \times 10^{-17})(2.511 \times 10^{6})}$

**86.** $\dfrac{(73.1)(1.6341 \times 10^{28})}{0.0000000019}$

**87.** $\dfrac{(0.0000162)(0.01582)}{(594{,}621{,}000)(0.0058)}$

**88.** $\dfrac{(3.542 \times 10^{-6})^{9}}{(5.05 \times 10^{4})^{12}}$

**89-92** ■ Racionalice el denominador.

**89.** **(a)** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ **(b)** $\sqrt{\dfrac{2}{x}}$ **(c)** $\sqrt{\dfrac{x}{3}}$

**90.** **(a)** $\sqrt{\dfrac{5}{12}}$ **(b)** $\sqrt{\dfrac{x}{6}}$ **(c)** $\sqrt{\dfrac{y}{2z}}$

**91.** **(a)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$ **(b)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{y^3}}$ **(c)** $\dfrac{x}{y^{2/5}}$

**92.** **(a)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$ **(b)** $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b^2}}$ **(c)** $\dfrac{1}{c^{3/7}}$

**93.** Sean $a$, $b$ y $c$ números reales con $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$. Determine el signo de cada expresión.

**(a)** $b^5$ **(b)** $b^{10}$ **(c)** $ab^2c^3$

**(d)** $(b - a)^3$ **(e)** $(b - a)^4$ **(f)** $\dfrac{a^3c^3}{b^6c^6}$

**94.** Demuestre las Leyes de Exponentes dadas para el caso en que $m$ y $n$ sean enteros positivos y $m > n$.

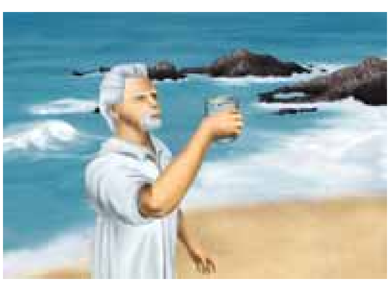
**(a)** Ley 2 **(b)** Ley 5 **(c)** Ley 6

## APLICACIONES

**95. Distancia a la estrella más cercana** Proxima Centauri, la estrella más cercana a nuestro sistema solar, está a 4.3 años luz de distancia. Use la información del Ejercicio 81(a) para expresar esta distancia en millas.

**96. Velocidad de la luz** La velocidad de la luz es de unas 186,000 mi/s. Use la información del Ejercicio 82(a) para hallar cuánto tarda un rayo de luz del Sol en llegar a la Tierra.

**97. Volumen de los océanos** El promedio de profundidad de los océanos es $3.7 \times 10^3$ m y el área de los océanos es $3.6 \times 10^{14}$ m$^2$. ¿Cuál es el volumen total del océano en litros? (Un metro cúbico contiene 1000 litros.)



**98. Deuda nacional** Al mes de julio de 2010, la población de Estados Unidos era de $3.070 \times 10^8$, y la deuda nacional era de $1.320 \times 10^{13}$ dólares. ¿Cuánto era la parte que adeuda cada persona?

**99. Número de moléculas** Una sala sellada de un hospital, con medidas de 5 m de ancho, 10 m de largo y 3 m de alto, está llena de oxígeno puro. Un metro cúbico contiene 1000 L, y 22.4 L de cualquier gas contienen $6.02 \times 10^{23}$ moléculas (número de Avogadro). ¿Cuántas moléculas de oxígeno hay en la sala?

**100. ¿A qué distancia puede usted ver?** Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia máxima $D$ a la que se puede ver desde lo alto de un edificio de altura $h$ se calcula con la fórmula

$$D = \sqrt{2rh + h^2}$$

donde $r = 3960$ millas es el radio de la Tierra y $D$ y $h$ también se miden en millas. ¿A qué distancia se puede ver desde la cubierta de observación de la Torre CN de Toronto, que está a 1135 pies sobre el suelo?


**101. Rapidez de un auto que patina** La policía usa la fórmula $s = \sqrt{30fd}$ para calcular la rapidez $s$ (en mi/h) a la que un auto se desplaza si patina $d$ pies después de aplicar repentinamente los frenos. El número $f$ es el coeficiente de fricción del pavimento, que es una medida de lo “resbaloso” de la carretera. La tabla siguiente da algunos cálculos comunes para $f$.

| | Asfalto | Concreto | Grava |
|---|---|---|---|
| **Seco** | 1.0 | 0.8 | 0.2 |
| **Mojado** | 0.5 | 0.4 | 0.1 |

**(a)** Si un auto patina 65 pies en concreto mojado, ¿cuál era su velocidad cuando se aplicaron los frenos?

**(b)** Si un auto corre a 50 mi/h, ¿cuánto patinará en asfalto mojado?