George Marks/Retrofile/Getty Images

CAPÍTULO 4

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

4.1 Funciones exponenciales

4.2 La función exponencial natural

4.3 Funciones logarítmicas

4.4 Leyes de logaritmos

4.5 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

4.6 Modelado con funciones exponenciales y logarítmicas

ENFOQUE SOBRE MODELADO

Ajuste de datos a curvas exponenciales y potencia

En este capítulo estudiamos una clase de funciones llamadas *funciones exponenciales*. Éstas son funciones, como $f(x) = 2^x$, donde la variable independiente está en el exponente. Las funciones exponenciales se usan para modelar numerosos fenómenos del mundo real, como por ejemplo el crecimiento de una población o el crecimiento de una inversión que gana interés compuesto. Una vez obtenido el modelo exponencial, podemos usar el modelo para predecir el tamaño poblacional o calcular la cantidad de una inversión para cualquier fecha futura. Para investigar *cuándo* una población llegará a cierto nivel, usamos las funciones inversas de funciones exponenciales, llamadas *funciones logarítmicas*. Por lo tanto, si tenemos un modelo exponencial para crecimiento poblacional, podemos contestar preguntas como: ¿Cuándo estará mi ciudad tan congestionada como la calle de Nueva York que se ve en la foto?

35. Interés compuesto ¿Cuál de las tasas dadas y períodos de capitalización darían la mejor inversión?

(a) $2\frac{1}{2}\%$ al año, capitalizado semestralmente
(b) $2\frac{1}{4}\%$ al año, capitalizado mensualmente
(c) 2% al año, capitalizado continuamente

36. Interés compuesto ¿Cuál de las tasas de interés dadas y períodos de capitalización darían la mejor inversión?

(a) $5\frac{1}{8}\%$ al año, capitalizado semestralmente
(b) 5% al año, capitalizado continuamente

37. Inversión Una suma de \$5000 se invierte a una tasa de interés del 9% al año, capitalizado continuamente.

(a) Encuentre el valor $A(t)$ de la inversión después de t años.
(b) Trace una gráfica de $A(t)$.
(c) Use la gráfica de $A(t)$ para determinar cuándo esta inversión ascenderá a \$25,000.

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

38. La definición de *e* Ilustre la definición del número e al graficar la curva $y = (1 + 1/x)^x$ y la recta $y = e^x$ en la misma pantalla, usando el rectángulo de vista $[0, 40]$ por $[0, 4]$.

4.3 FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Funciones logarítmicas ▶ Gráficas de funciones logarítmicas ▶ Logaritmos comunes ▶ Logaritmos naturales

En esta sección estudiamos las inversas de funciones exponenciales.

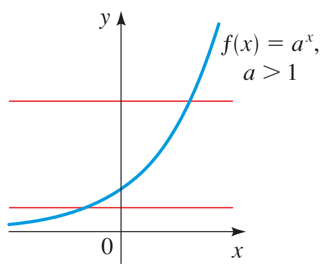


FIGURA 1 $f(x) = a^x$ es biunívoca.

▼ Funciones logarítmicas

Toda función exponencial $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es una función biunívoca por la Prueba de la Recta Horizontal (vea Figura 1 para el caso $a > 1$) y por tanto tiene una función inversa. La función inversa f^{-1} se denomina *función logarítmica con base a* y se denota con $\log_a$. Recuerde de la Sección 2.6 que f^{-1} está definida por

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

Esto lleva a la siguiente definición de la función logarítmica.

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Sea a un número positivo con $a \neq 1$. La **función logarítmica con base *a***, denotada por $\mathbf{log}_a$, está definida por

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Por lo tanto, $\log_a x$ es el *exponente* al cual la base a debe ser elevado para obtener x.

Leemos $\log_a x = y$ como "el log base a de x es y".

Cuando usamos la definición de logaritmos para pasar entre la **forma logarítmica** $\log_a x = y$ y la **forma exponencial** $a^y = x$, es útil observar que, en ambas formas, la base es la misma:

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_{\underbrace{a}_{\text{Base}}} x = \overbrace{y}^{\text{Exponente}}$	$\underbrace{a}_{\text{Base}}^{\overbrace{y}^{\text{Exponente}}} = x$

Por tradición el nombre de la función logarítmica es $\log_a$, no sólo una letra. También, por lo general omitimos los paréntesis en la notación de función y escribimos

$$\log_a(x) = \log_a x$$

EJEMPLO 1 | Formas logarítmicas y exponenciales

Las formas logarítmicas y exponenciales son ecuaciones equivalentes: si una es verdadera, también lo es la otra. Por lo tanto, podemos pasar de una forma a la otra como en las siguientes ilustraciones.

Forma logarítmica	**Forma exponencial**
$\log_{10} 100{,}000 = 5$	$10^5 = 100{,}000$
$\log_2 8 = 3$	$2^3 = 8$
$\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
$\log_5 s = r$	$5^r = s$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

x	$\log_{10} x$
10^4	4
10^3	3
10^2	2
10	1
1	0
10^{-1}	-1
10^{-2}	-2
10^{-3}	-3
10^{-4}	-4

Es importante entender que $\log_a x$ es un *exponente*. Por ejemplo, los números de la columna derecha de la tabla del margen son los logaritmos (base 10) de los números de la columna izquierda. Éste es el caso para todas las bases, como ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 | Evaluación de logaritmos

(a) $\log_{10} 1000 = 3$ porque $10^3 = 1000$

(b) $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$

(c) $\log_{10} 0.1 = -1$ porque $10^{-1} = 0.1$

(d) $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ porque $16^{1/2} = 4$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **7** Y **9**

Propiedad de la Función Inversa:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

Cuando aplicamos la Propiedad de la Función Inversa descrita en la página 201 a $f(x) = a^x$ y $f^{-1}(x) = \log_a x$, obtenemos

$$\log_a(a^x) = x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a x} = x, \qquad x > 0$$

Hacemos una lista de éstas y otras propiedades de logaritmos que estudiamos en esta sección.

PROPIEDADES DE LOGARITMOS

Propiedad	**Razón**
1. $\log_a 1 = 0$	Debemos elevar a a la potencia 0 para obtener 1.
2. $\log_a a = 1$	Debemos elevar a a la potencia 1 para obtener a.
3. $\log_a a^x = x$	Debemos elevar a a la potencia x para obtener a^x.
4. $a^{\log_a x} = x$	$\log_a x$ es la potencia a la que a debe elevarse para obtener x.

EJEMPLO 3 | Aplicar propiedades de logaritmos

Ilustramos las propiedades de logaritmos cuando la base es 5.

$\log_5 1 = 0$	Propiedad 1	$\log_5 5 = 1$	Propiedad 2
$\log_5 5^8 = 8$	Propiedad 3	$5^{\log_5 12} = 12$	Propiedad 4

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **19** Y **25**

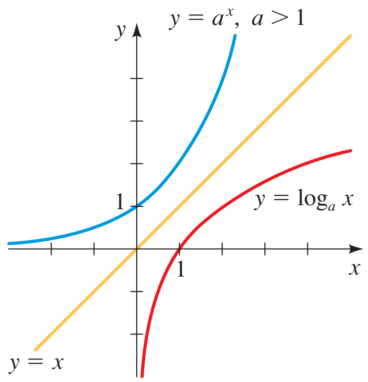


FIGURA 2 Gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log_a x$

Gráficas de funciones logarítmicas

Recuerde que si una función biunívoca f tiene dominio A y rango B, entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A. Como la función exponencial $f(x) = a^x$ con $a \neq 1$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$, concluimos que su función inversa, $f^{-1}(x) = \log_a x$, tiene dominio $(0, \infty)$ y rango $\mathbb{R}$.

La gráfica de $f^{-1}(x) = \log_a x$ se obtiene al reflejar la gráfica de $f(x) = a^x$ en la recta $y = x$. La Figura 2 muestra el caso $a > 1$. El hecho de que $y = a^x$ (para $a > 1$) sea una función muy rápidamente creciente para $x > 0$ implica que $y = \log_a x$ es una función muy rápidamente creciente para $x > 1$ (vea Ejercicio 92).

Como $\log_a 1 = 0$, el punto de intersección x de la función $y = \log_a x$ es 1. El eje y es una asíntota vertical de $y = \log_a x$ porque $\log_a x \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$.

EJEMPLO 4 | Graficar una función logarítmica localizando puntos

Trace la gráfica de $f(x) = \log_2 x$.

SOLUCIÓN Para hacer una tabla de valores, escogemos los valores x que sean potencias de 2 para que podamos fácilmente hallar sus logaritmos. Localizamos estos puntos y los enlazamos con una curva sin irregularidades como en la Figura 3.

x	$\log_2 x$
2^3	3
2^2	2
2	1
1	0
2^{-1}	−1
2^{-2}	−2
2^{-3}	−3
2^{-4}	−4

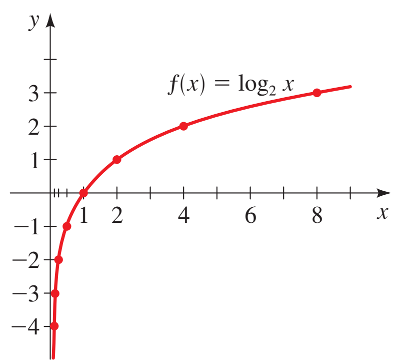


FIGURA 3

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **41** ■

La Figura 4 muestra las gráficas de la familia de funciones logarítmicas con bases 2, 3, 5 y 10. Estas gráficas se trazan al reflejar las gráficas de $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 5^x$ y $y = 10^x$ (vea Figura 2 en la Sección 4.1) en la recta $y = x$. También podemos localizar puntos como ayuda para trazar estas gráficas, como se ilustra en el Ejemplo 4.

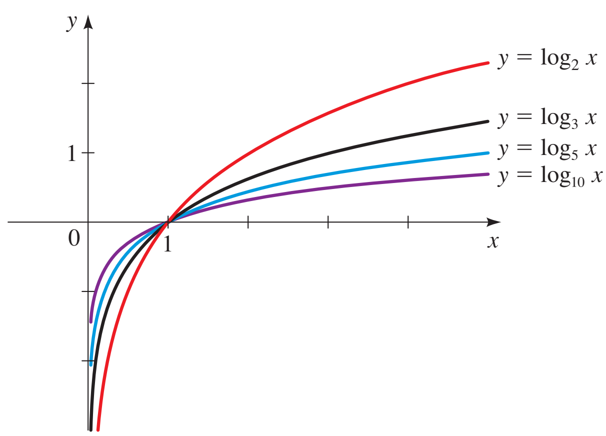


FIGURA 4 Familia de funciones logarítmicas

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

© Bettmann/CORBIS

© Hulton-Deutsch Collection/CORBIS

Aplicación de la ley

Las matemáticas ayudan a la aplicación de la ley en numerosas y sorprendentes formas, desde la reconstrucción de trayectorias de balas hasta determinar el tiempo de una muerte, para calcular la probabilidad de que una muestra de ADN sea de una persona en particular. Un uso interesante está en la búsqueda de personas desaparecidas. Una persona que haya estado desaparecida durante años podría verse muy diferente respecto de su más reciente fotografía disponible. Esto es particularmente cierto si la persona desaparecida es un niño. ¿Alguna vez se ha preguntado usted cómo se verá dentro de 5, 10 o 15 años?

Unos investigadores han hallado que diferentes partes del cuerpo crecen más rápido que otras. Por ejemplo, sin duda usted ha observado que la cabeza de un bebé es mucho más grande con respecto a su cuerpo que la cabeza de un adulto. Como otro ejemplo, la relación entre la longitud del brazo de una persona y la estatura de ésta es $\frac{1}{3}$ en un niño pero alrededor de $\frac{2}{5}$ en un adulto. Al recolectar datos y analizar gráficas, los investigadores pueden determinar las funciones que modelan el crecimiento. Al igual que en todos los fenómenos de crecimiento, las funciones exponenciales y logarítmicas desempeñan una función de importancia decisiva. Por ejemplo, la fórmula que relaciona la longitud l de un brazo con la estatura h es $l = ae^{kh}$ donde a y k son constantes. Estudiando varias características físicas de una persona, biólogos matemáticos modelan cada una de las características con una función que describe la forma en que cambian con el tiempo. Los modelos de características del rostro se pueden programar en una computadora para dar una imagen de cómo cambia con el tiempo la apariencia de una persona. Estas imágenes ayudan a departamentos de aplicación de la ley para localizar a personas extraviadas.

En los siguientes dos ejemplos graficamos funciones logarítmicas empezando con las gráficas básicas de la Figura 4 y usando las transformaciones de la Sección 2.5.

EJEMPLO 5 | Reflejar gráficas de funciones logarítmicas

Trace la gráfica de cada función.

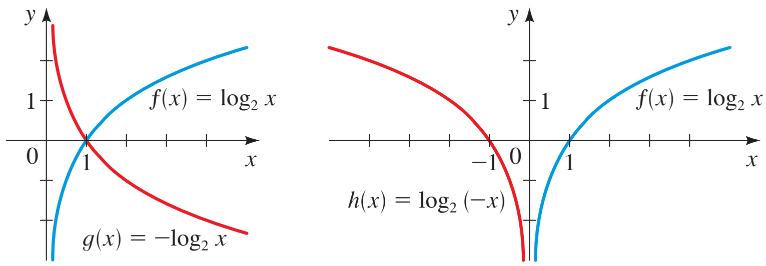
(a) $g(x) = -\log_2 x$

(b) $h(x) = \log_2(-x)$

SOLUCIÓN

(a) Empezamos con la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ y la reflejamos en el eje x para obtener la gráfica de $g(x) = -\log_2 x$ en la Figura 5(a).

(b) Empezamos con la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ y la reflejamos en el eje y para obtener la gráfica de $h(x) = \log_2(-x)$ en la Figura 5(b).



(a) (b)

FIGURA 5

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **55**

EJEMPLO 6 | Desplazar gráficas de funciones logarítmicas

Encuentre el dominio de cada función y trace la gráfica.

(a) $g(x) = 2 + \log_5 x$

(b) $h(x) = \log_{10}(x - 3)$

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de g se obtiene de la gráfica de $f(x) = \log_5 x$ (Figura 4) al desplazar hacia arriba 2 unidades (vea Figura 6). El dominio de f es $(0, \infty)$.

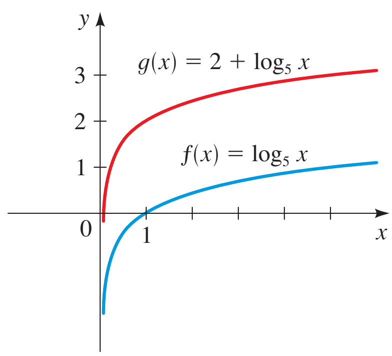
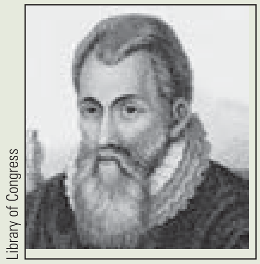


FIGURA 6

(b) La gráfica de h se obtiene de la gráfica de $f(x) = \log_{10} x$ (Figura 4) al desplazar a la derecha 3 unidades (vea Figura 7). La recta $x = 3$ es una asíntota vertical. Como $\log_{10} x$ está definido sólo cuando $x > 0$, el dominio de $h(x) = \log_{10}(x - 3)$ es

$$\{x \mid x - 3 > 0\} = \{x \mid x > 3\} = (3, \infty)$$



JOHN NAPIER (1550-1617) fue un terrateniente escocés para quien las matemáticas eran un pasatiempo favorito. Hoy lo conocemos por su invención clave: los logaritmos, que él publicó en 1614 bajo el título de *A description of the Marvelous Rule of Logarithms* (*Una descripción de la Maravillosa Regla de los Logaritmos*). En la época de Napier, los logaritmos eran utilizados exclusivamente para simplificar complicados cálculos. Por ejemplo, para multiplicar dos números grandes, los escribiríamos como potencias de 10. Los exponentes son simplemente los logaritmos de los números. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 4532 \times 57{,}783 &\approx 10^{3.65629} \times 10^{4.76180} \\ &= 10^{8.41809} \\ &\approx 261{,}872{,}564 \end{aligned}$$

La idea es que multiplicar potencias de 10 es fácil (sólo sumamos sus exponentes). Napier produjo extensas tablas que dan los logaritmos (o exponentes) de números. Desde el advenimiento de calculadoras y computadoras, los logaritmos ya no se usan para este propósito, pero las funciones logarítmicas han encontrado numerosas aplicaciones, algunas de las cuales se describen en este capítulo.

Napier escribió sobre innumerables temas. Una de sus obras más pintorescas es un libro titulado *A Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John,* en el que predijo que el mundo se acabaría en el año 1700.

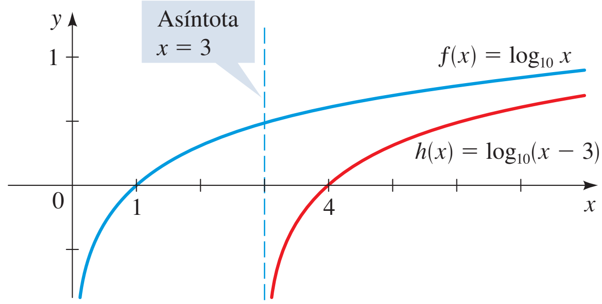


FIGURA 7

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **53** Y **57** ■

Logaritmos comunes

Ahora estudiamos logaritmos con base 10.

LOGARITMO COMÚN

El logaritmo común con base 10 se llama **logaritmo común** y se denota omitiendo la base:

$$\log x = \log_{10} x$$

De la definición de logaritmos podemos fácilmente hallar que

$$\log 10 = 1 \qquad \text{y} \qquad \log 100 = 2$$

Pero ¿cómo definimos log 50? Necesitamos hallar el exponente y tal que $10^y = 50$. Claramente, 1 es demasiado pequeño y 2 es demasiado grande. Por lo tanto

$$1 < \log 50 < 2$$

Para obtener una mejor aproximación, podemos experimentar para hallar una potencia de 10 más cercana a 50. Por fortuna, las calculadoras científicas están equipadas con una tecla LOG que directamente da valores de logaritmos comunes.

EJEMPLO 7 | Evaluar logaritmos comunes

Use calculadora para hallar valores apropiados de $f(x) = \log x$ y utilice los valores para trazar la gráfica.

SOLUCIÓN Hacemos una tabla de valores, usando una calculadora para evaluar la función en aquellos valores de x que no sean potencias de 10. Localizamos esos puntos y los enlazamos con una curva sin irregularidades como en la Figura 8.

x	$\log x$
0.01	−2
0.1	−1
0.5	−0.301
1	0
4	0.602
5	0.699
10	1

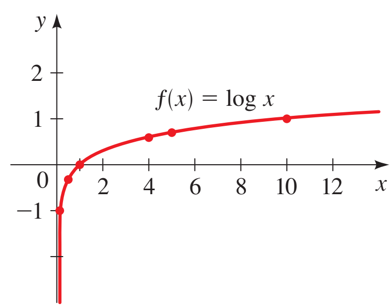


FIGURA 8

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **43** ■

La respuesta humana al sonido e intensidad luminosa es logarítmica.

Los científicos modelan la respuesta humana a estímulos (sonido, luz o presión) usando funciones logarítmicas. Por ejemplo, la intensidad de un sonido debe ser aumentado muchas veces antes que "sintamos" que la intensidad simplemente se ha duplicado. El psicólogo Gustav Fechner formuló la ley como

$$S = k \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde S es la intensidad subjetiva del estímulo, I es la intensidad física del estímulo, I_0 representa el umbral de intensidad física y k es una constante que es diferente para cada estímulo sensorial.

EJEMPLO 8 | Logaritmos comunes y sonido

La percepción de la intensidad B (en decibeles, dB) de un sonido con intensidad física I (en W/m^2) está dada por

$$B = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Estudiamos la escala de decibeles en más detalle en la Sección 4.6.

donde I_0 es la intensidad física de un sonido apenas audible. Encuentre el nivel de decibeles (intensidad) de un sonido cuya intensidad física I es 100 veces la de I_0.

SOLUCIÓN Encontramos el nivel de decibeles B usando el hecho de que $I = 100I_0$.

$$\begin{aligned} B &= 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) && \text{Definición de } B \\ &= 10 \log\left(\frac{100I_0}{I_0}\right) && I = 100I_0 \\ &= 10 \log 100 && \text{Cancele } I_0 \\ &= 10 \cdot 2 = 20 && \text{Definición de log} \end{aligned}$$

La intensidad del sonido es de 20 dB.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **87**

Logaritmos naturales

La notación ln es una abreviatura del nombre latino *logarithmus naturalis.*

De todas las posibles bases a para logaritmos, resulta que la opción más cómoda para los propósitos de cálculo es el número e, que definimos en la Sección 4.2.

> **LOGARITMO NATURAL**
>
> El logaritmo con base e se denomina **logaritmo natural** y se denota con **ln:**
>
> $$\ln x = \log_e x$$

La función de logaritmo natural $y = \ln x$ es la función inversa de la función exponencial natural $y = e^x$. Ambas funciones están graficadas en la Figura 9. Por la definición de funciones inversas tenemos

$$\boxed{\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x}$$

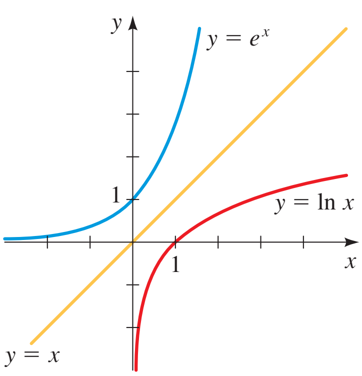


FIGURA 9 Gráfica de la función de logaritmo natural

Si sustituimos $a = e$ y escribimos "ln" por "$\log_e$" en las propiedades de logaritmos ya citadas antes, obtenemos las siguientes propiedades de logaritmos naturales.

PROPIEDADES DE LOGARITMOS NATURALES

Propiedad	Razón
1. $\ln 1 = 0$	Debemos elevar e a la potencia 0 para obtener 1.
2. $\ln e = 1$	Debemos elevar e a la potencia 1 para obtener e.
3. $\ln e^x = x$	Debemos elevar e a la potencia x para obtener e^x.
4. $e^{\ln x} = x$	$\ln x$ es la potencia a la que e debe elevarse para obtener x.

Las calculadoras están equipadas con una tecla LN que directamente presenta los valores de logaritmos naturales.

EJEMPLO 9 | Evaluar la función de logaritmo natural

(a) $\ln e^8 = 8$ — Definición de logaritmo natural

(b) $\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \ln e^{-2} = -2$ — Definición de logaritmo natural

(c) $\ln 5 \approx 1.609$ — Use la tecla LN de su calculadora

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

EJEMPLO 10 | Hallar el dominio de una función logarítmica

Encuentre el dominio de la función $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

SOLUCIÓN Igual que con cualquier función logarítmica, $\ln x$ está definida cuando $x > 0$. Entonces, el dominio de f es

$$\{x \mid 4 - x^2 > 0\} = \{x \mid x^2 < 4\} = \{x \mid |x| < 2\}$$
$$= \{x \mid -2 < x < 2\} = (-2, 2)$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63**

EJEMPLO 11 | Trazar la gráfica de una función logarítmica

Trace la gráfica de la función $y = x\ln(4 - x^2)$, y úsela para hallar las asíntotas y valores máximo y mínimo locales.

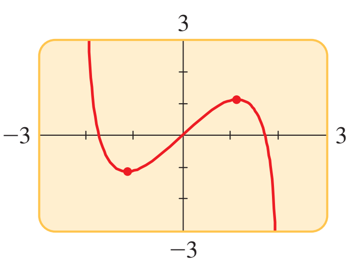


FIGURA 10
$y = x\ln(4 - x^2)$

SOLUCIÓN Como en el Ejemplo 10, el dominio de esta función es el intervalo $(-2, 2)$, de modo que escogemos el rectángulo de vista $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$. La gráfica se muestra en la Figura 10, y de ella vemos que las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

La función tiene un punto máximo local a la derecha de $x = 1$ y un punto mínimo local a la izquierda de $x = -1$. Al hacer acercamiento (zoom) y trazar a lo largo de la gráfica con el cursor, encontramos que el valor máximo local es aproximadamente 1.13 y esto ocurre cuando $x \approx 1.15$. Del mismo modo (o al observar que la función es impar), encontramos que el valor mínimo local es alrededor de -1.13 y se presenta cuando $x \approx -1.15$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

4.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. log x es el exponente al cual la base 10 debe elevarse para obtener ________. Por lo tanto, podemos completar la tabla siguiente para log x.

x	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	$10^{1/2}$
log x								

2. La función $f(x) = \log_9 x$ es la función logarítmica con base ________. Por tanto, $f(9) =$ ________, $f(1) =$ ________, $f(\frac{1}{9}) =$ ________, y $f(3) =$ ________.

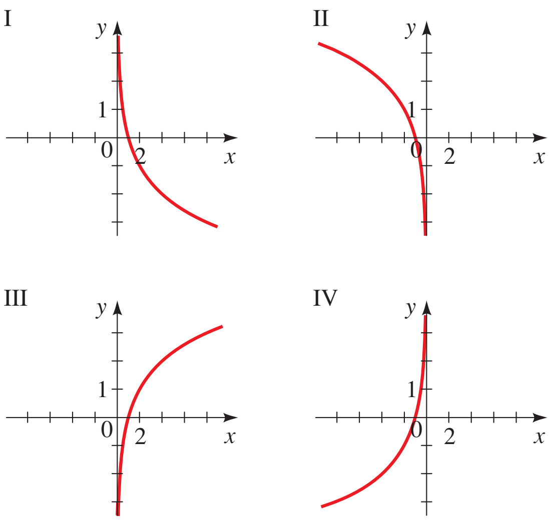
3. (a) $5^3 = 125$, entonces $\log_{\square} \square = \square$

(b) $\log_5 25 = 2$, entonces $\square^{\square} = \square$

4. Relacione la función logarítmica con su gráfica.

(a) $f(x) = \log_2 x$ **(b)** $f(x) = \log_2(-x)$

(c) $f(x) = -\log_2 x$ **(d)** $f(x) = -\log_2(-x)$



HABILIDADES

5-6 ■ Complete la tabla al hallar la forma logarítmica o exponencial apropiada de la ecuación, como en el Ejemplo 1.

5.

Forma logarítmica	**Forma exponencial**
$\log_8 8 = 1$	
$\log_8 64 = 2$	
	$8^{2/3} = 4$
	$8^3 = 512$
$\log_8\left(\frac{1}{8}\right) = -1$	
	$8^{-2} = \frac{1}{64}$

6.

Forma logarítmica	**Forma exponencial**
	$4^3 = 64$
$\log_4 2 = \frac{1}{2}$	
	$4^{3/2} = 8$
$\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = -2$	
$\log_4\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$	
	$4^{-5/2} = \frac{1}{32}$

7-12 ■ Exprese la ecuación en forma exponencial.

7. (a) $\log_5 25 = 2$ **(b)** $\log_5 1 = 0$

8. (a) $\log_{10} 0.1 = -1$ **(b)** $\log_8 512 = 3$

9. (a) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ **(b)** $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$

10. (a) $\log_3 81 = 4$ **(b)** $\log_8 4 = \frac{2}{3}$

11. (a) $\ln 5 = x$ **(b)** $\ln y = 5$

12. (a) $\ln(x + 1) = 2$ **(b)** $\ln(x - 1) = 4$

13-18 ■ Exprese la ecuación en forma logarítmica.

13. (a) $5^3 = 125$ **(b)** $10^{-4} = 0.0001$

14. (a) $10^3 = 1000$ **(b)** $81^{1/2} = 9$

15. (a) $8^{-1} = \frac{1}{8}$ **(b)** $2^{-3} = \frac{1}{8}$

16. (a) $4^{-3/2} = 0.125$ **(b)** $7^3 = 343$

17. (a) $e^x = 2$ **(b)** $e^3 = y$

18. (a) $e^{x+1} = 0.5$ **(b)** $e^{0.5x} = t$

19-28 ■ Evalúe la expresión.

19. (a) $\log_3 3$ **(b)** $\log_3 1$ **(c)** $\log_3 3^2$

20. (a) $\log_5 5^4$ **(b)** $\log_4 64$ **(c)** $\log_3 9$

21. (a) $\log_6 36$ **(b)** $\log_9 81$ **(c)** $\log_7 7^{10}$

22. (a) $\log_2 32$ **(b)** $\log_8 8^{17}$ **(c)** $\log_6 1$

23. (a) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$ **(b)** $\log_{10}\sqrt{10}$ **(c)** $\log_5 0.2$

24. (a) $\log_5 125$ **(b)** $\log_{49} 7$ **(c)** $\log_9\sqrt{3}$

25. (a) $2^{\log_2 37}$ **(b)** $3^{\log_3 8}$ **(c)** $e^{\ln\sqrt{5}}$

26. (a) $e^{\ln \pi}$ **(b)** $10^{\log 5}$ **(c)** $10^{\log 87}$

27. (a) $\log_8 0.25$ **(b)** $\ln e^4$ **(c)** $\ln(1/e)$

28. (a) $\log_4\sqrt{2}$ **(b)** $\log_4\left(\frac{1}{2}\right)$ **(c)** $\log_4 8$

29-36 ■ Use la definición de la función logarítmica para hallar x.

29. (a) $\log_2 x = 5$ **(b)** $\log_2 16 = x$

30. (a) $\log_5 x = 4$ **(b)** $\log_{10} 0.1 = x$

31. (a) $\log_3 243 = x$ **(b)** $\log_3 x = 3$

32. (a) $\log_4 2 = x$ **(b)** $\log_4 x = 2$

33. (a) $\log_{10} x = 2$ **(b)** $\log_5 x = 2$

34. **(a)** $\log_x 1000 = 3$ **(b)** $\log_x 25 = 2$

35. **(a)** $\log_x 16 = 4$ **(b)** $\log_x 8 = \frac{3}{2}$

36. **(a)** $\log_x 6 = \frac{1}{2}$ **(b)** $\log_x 3 = \frac{1}{3}$

37-40 ■ Use calculadora para evaluar la expresión, aproximada a cuatro lugares decimales.

37. **(a)** $\log 2$ **(b)** $\log 35.2$ **(c)** $\log\left(\frac{2}{3}\right)$

38. **(a)** $\log 50$ **(b)** $\log \sqrt{2}$ **(c)** $\log(3\sqrt{2})$

39. **(a)** $\ln 5$ **(b)** $\ln 25.3$ **(c)** $\ln(1 + \sqrt{3})$

40. **(a)** $\ln 27$ **(b)** $\ln 7.39$ **(c)** $\ln 54.6$

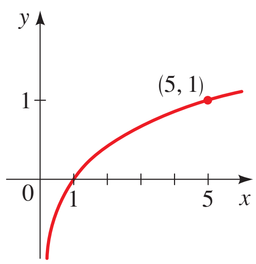
41-44 ■ Trace la gráfica de la función al localizar puntos.

41. $f(x) = \log_3 x$ **42.** $g(x) = \log_4 x$

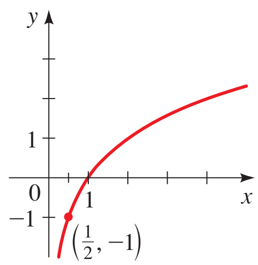
43. $f(x) = 2 \log x$ **44.** $g(x) = 1 + \log x$

45-48 ■ Encuentre la función de la forma $y = \log_a x$ cuya gráfica se da.

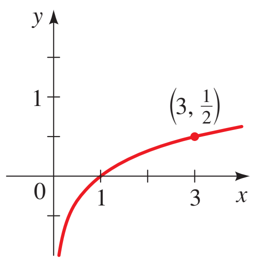
45.



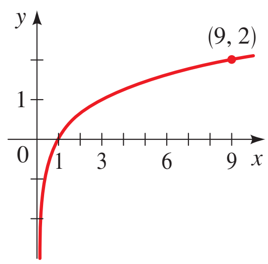
46.



47.



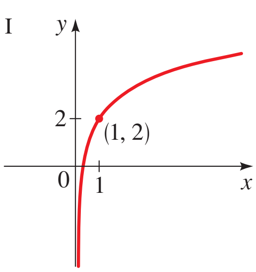
48.



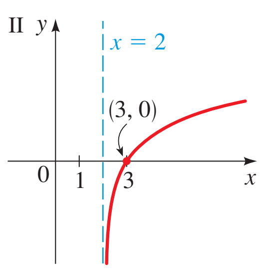
49-50 ■ Relacione la función logarítmica con una de las gráficas marcadas I o II.

49. $f(x) = 2 + \ln x$ **50.** $f(x) = \ln(x - 2)$

I



II



51. Trace la gráfica de $y = 4^x$ y, a continuación, úsela para trazar la gráfica de $y = \log_4 x$.

52. Trace la gráfica de $y = 3^x$ y, a continuación, úsela para trazar la gráfica de $y = \log_3 x$.

53-62 ■ Grafique la función, no al localizar puntos sino empezando de las gráficas de las Figuras 4 y 9. Exprese el dominio, rango y asíntota.

53. $f(x) = \log_2(x - 4)$ **54.** $f(x) = -\log_{10} x$

55. $g(x) = \log_5(-x)$ **56.** $g(x) = \ln(x + 2)$

57. $y = 2 + \log_3 x$ **58.** $y = \log_3(x - 1) - 2$

59. $y = 1 - \log_{10} x$ **60.** $y = 1 + \ln(-x)$

61. $y = |\ln x|$ **62.** $y = \ln |x|$

63-68 ■ Encuentre el dominio de la función.

63. $f(x) = \log_{10}(x + 3)$ **64.** $f(x) = \log_5(8 - 2x)$

65. $g(x) = \log_3(x^2 - 1)$ **66.** $g(x) = \ln(x - x^2)$

67. $h(x) = \ln x + \ln(2 - x)$

68. $h(x) = \sqrt{x - 2} - \log_5(10 - x)$

69-74 ■ Trace la gráfica de la función en un rectángulo de vista apropiado, y úsela para hallar el dominio, las asíntotas y los valores máximo y mínimo locales.

69. $y = \log_{10}(1 - x^2)$ **70.** $y = \ln(x^2 - x)$

71. $y = x + \ln x$ **72.** $y = x(\ln x)^2$

73. $y = \dfrac{\ln x}{x}$ **74.** $y = x \log_{10}(x + 10)$

75-78 ■ Encuentre las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus dominios.

75. $f(x) = 2^x, \quad g(x) = x + 1$

76. $f(x) = 3^x, \quad g(x) = x^2 + 1$

77. $f(x) = \log_2 x, \quad g(x) = x - 2$

78. $f(x) = \log x, \quad g(x) = x^2$

79. Compare las rapidez de crecimiento de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \sqrt{x}$ al trazar sus gráficas en una pantalla común usando el rectángulo de vista $[-1, 30]$ por $[-1, 6]$.

80. **(a)** Trazando las gráficas de las funciones

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x) \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

en un rectángulo de vista apropiado, demuestre que aun cuando una función logarítmica empieza más alta que una función de raíz, es finalmente superada por la función de raíz.

(b) Encuentre, aproximadas a dos lugares decimales, las soluciones de la ecuación $\sqrt{x} = 1 + \ln(1 + x)$.

81-82 ■ Nos dan una familia de funciones. **(a)** Trace gráficas de la familia para $c = 1, 2, 3$ y 4. **(b)** ¿Cómo están relacionadas las gráficas de la parte (a)?

81. $f(x) = \log(cx)$ **82.** $f(x) = c \log x$

83-84 ■ Nos dan una función $f(x)$. **(a)** Encuentre el dominio de la función f. **(b)** Encuentre la función inversa de f.

83. $f(x) = \log_2(\log_{10} x)$ **84.** $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

85. **(a)** Encuentre la inversa de la función $f(x) = \dfrac{2^x}{1 + 2^x}$.

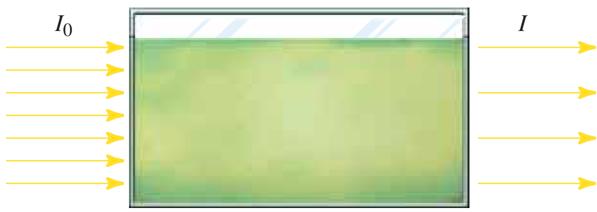
(b) ¿Cuál es el dominio de la función inversa?

APLICACIONES

86. Absorción de luz Un espectrofotómetro mide la concentración de una muestra disuelta en agua al hacer brillar una luz a través de ella y registrar la cantidad de luz que emerge. En otras palabras, si sabemos la cantidad de luz que es absorbida, podemos calcular la concentración de la muestra. Para cierta sustancia, la concentración (en moles por litro) se encuentra usando la fórmula

$$C = -2500 \ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde I_0 es la intensidad de la luz incidente e I es la intensidad de la luz que emerge. Encuentre la concentración de la sustancia si la intensidad I es 70% de I_0.



87. Determinación de la edad por carbono La edad de un artefacto antiguo puede ser determinada por la cantidad de carbono 14 radiactivo restante en una muestra. Si D_0 es la cantidad original de carbono 14 y D es la cantidad restante, entonces la edad A del artefacto (en años) está dada por

$$A = -8267 \ln\left(\frac{D}{D_0}\right)$$

Encuentre la edad de un objeto si la cantidad D de carbono 14 que queda en el objeto es 73% de la cantidad original D_0.

88. Colonia de bacterias Cierta cepa de bacterias se divide cada tres horas. Si una colonia se inicia con 50 bacterias, entonces el tiempo t (en horas) necesario para que la colonia crezca a N bacterias está dado por

$$t = 3\frac{\log(N/50)}{\log 2}$$

Encuentre el tiempo necesario para que la colonia crezca a un millón de bacterias.

89. Inversión El tiempo necesario para duplicar la cantidad de una inversión a una tasa de interés r capitalizado continuamente está dado por

$$t = \frac{\ln 2}{r}$$

Encuentre el tiempo necesario para duplicar una inversión al 6%, 7% y 8%.

90. Carga de una batería La rapidez a la que se carga una batería es más lenta cuanto más cerca está la batería de su carga máxima C_0. El tiempo (en horas) necesario para cargar una batería completamente descargada a una carga C está dado por

$$t = -k \ln\left(1 - \frac{C}{C_0}\right)$$

donde k es una constante positiva que depende de la batería. Para cierta batería, $k = 0.25$. Si esta batería está completamente descargada, ¿cuánto tomará cargarla al 90% de su carga máxima C_0?

91. Dificultad de una tarea La dificultad en "alcanzar un objetivo" (por ejemplo usar el ratón para hacer clic en un icono en la pantalla de la computadora) depende de la distancia a la que está el objetivo y el tamaño de éste. De acuerdo con la Ley de Fitts, el índice de dificultad (ID) está dado por

$$\text{ID} = \frac{\log(2A/W)}{\log 2}$$

donde W es el ancho del objetivo y A es la distancia al centro del objetivo. Compare la dificultad de hacer clic en un icono de 5 mm de ancho con hacer clic en uno de 10 mm de ancho. En cada caso, suponga que el ratón está a 100 mm del icono.

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

92. Altura de la gráfica de una función logarítmica Suponga que la gráfica de $y = 2^x$ está trazada en un plano de coordenadas donde la unidad de medición es 1 pulgada.

(a) Demuestre que, a una distancia de 2 pies a la derecha del origen, la altura de la gráfica es de unas 265 millas.

(b) Si la gráfica de $y = \log_2 x$ se traza en el mismo conjunto de ejes, ¿a qué distancia a la derecha del origen tenemos que ir antes que la altura de la curva llegue a 2 pies?

93. El Googolplex Un **googol** es 10^{100}, y un **googolplex** es 10^{googol}. Encuentre

$$\log(\log(\text{googol})) \qquad \text{y} \qquad \log(\log(\log(\text{googolplex})))$$

94. Comparación de logaritmos ¿Cuál es más grande, $\log_4 17$ o $\log_5 24$? Explique su razonamiento.

95. Número de dígitos de un entero Compare log 1000 con el número de dígitos de 1000. Haga lo mismo para 10,000. ¿Cuántos dígitos tiene cualquier número entre 1000 y 10,000? ¿Entre cuáles dos valores debe encontrarse el logaritmo común de tal número? Use sus observaciones para explicar por qué el número de dígitos de cualquier entero positivo x es $[\![\log x]\!] + 1$. (El símbolo $[\![n]\!]$ es la función entero mayor definida en la Sección 2.2.) ¿Cuántos dígitos tiene el número 2^{100}?

4.4 LEYES DE LOGARITMOS

Leyes de logaritmos ▶ Expansión y combinación de expresiones logarítmicas ▶ Fórmula para cambio de base

En esta sección estudiamos propiedades de logaritmos. Estas propiedades dan a las funciones logarítmicas una amplia variedad de aplicaciones, como veremos en la Sección 4.6.

▼ Leyes de logaritmos

Como los logaritmos son exponentes, las Leyes de Exponentes dan lugar a las Leyes de Logaritmos.

LEYES DE LOGARITMOS

Sea a un número positivo, con $a \neq 1$. Sean A, B y C cualesquier números reales con $A > 0$ y $B > 0$.

Ley	Descripción
1. $\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$	El logaritmo de un producto de números es la suma de los logaritmos de los números.
2. $\log_a\left(\dfrac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$	El logaritmo de un cociente de números es la diferencia de los logaritmos de los números.
3. $\log_a(A^C) = C \log_a A$	El logaritmo de una potencia de un número es el exponente por el logaritmo del número.

DEMOSTRACIÓN Hacemos uso de la propiedad $\log_a a^x = x$ de la Sección 4.3.

Ley 1 Sean $\log_a A = u$ y $\log_a B = v$. Cuando se escriben en forma exponencial, estas cantidades se convierten en

$$a^u = A \qquad \text{y} \qquad a^v = B$$

Por lo tanto,
$$\log_a(AB) = \log_a(a^u a^v) = \log_a(a^{u+v})$$
$$= u + v = \log_a A + \log_a B$$

Ley 2 Usando la Ley 1, tenemos

$$\log_a A = \log_a\left[\left(\frac{A}{B}\right)B\right] = \log_a\left(\frac{A}{B}\right) + \log_a B$$

Así
$$\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$$

Ley 3 Sean $\log_a A = u$. Entonces $a^u = A$, por lo que

$$\log_a(A^C) = \log_a(a^u)^C = \log_a(a^{uC}) = uC = C \log_a A$$

■

EJEMPLO 1 | Uso de las leyes de logaritmos para evaluar expresiones

Evalúe las expresiones siguientes.

(a) $\log_4 2 + \log_4 32$

(b) $\log_2 80 - \log_2 5$

(c) $-\frac{1}{3}\log 8$

SOLUCIÓN

(a) $\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4(2 \cdot 32)$ Ley 1

$= \log_4 64 = 3$ Porque $64 = 4^3$

(b) $\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right)$ Ley 2

$= \log_2 16 = 4$ Porque $16 = 2^4$

(c) $-\frac{1}{3}\log 8 = \log 8^{-1/3}$ Ley 3

$= \log\left(\frac{1}{2}\right)$ Propiedad de exponentes negativos

≈ -0.301 Calculadora

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **7, 9** Y **11**

Expansión y combinación de expresiones logarítmicas

Las Leyes de Logaritmos nos permiten escribir el logaritmo de un producto o un cociente como la suma o diferencia de logaritmos. Este proceso, llamado *expansión* de una expresión logarítmica, se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 | Expansión de expresiones logarítmicas

Use las Leyes de Logaritmos para expandir estas expresiones.

(a) $\log_2(6x)$ **(b)** $\log_5(x^3y^6)$ **(c)** $\ln\left(\dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}\right)$

SOLUCIÓN

(a) $\log_2(6x) = \log_2 6 + \log_2 x$ Ley 1

(b) $\log_5(x^3y^6) = \log_5 x^3 + \log_5 y^6$ Ley 1

$= 3\log_5 x + 6\log_5 y$ Ley 3

(c) $\ln\left(\dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}\right) = \ln(ab) - \ln\sqrt[3]{c}$ Ley 2

$= \ln a + \ln b - \ln c^{1/3}$ Ley 1

$= \ln a + \ln b - \frac{1}{3}\ln c$ Ley 3

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **19, 21** Y **33**

Las Leyes de Logaritmos también nos permiten invertir el proceso de expansión que se hizo en el Ejemplo 2. Es decir, podemos escribir sumas y diferencias de logaritmos como un solo logaritmo. Este proceso, llamado *combinar* expresiones logarítmicas, está ilustrado en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 | Combinar expresiones logarítmicas

Combine $3\log x + \frac{1}{2}\log(x + 1)$ en un solo logaritmo.

SOLUCIÓN

$3\log x + \frac{1}{2}\log(x + 1) = \log x^3 + \log(x + 1)^{1/2}$ Ley 3

$= \log(x^3(x + 1)^{1/2})$ Ley 1

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **47**

EJEMPLO 4 | Combinar expresiones logarítmicas

Combine $3\ln s + \frac{1}{2}\ln t - 4\ln(t^2 + 1)$ en un solo logaritmo.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 3\ln s + \tfrac{1}{2}\ln t - 4\ln(t^2+1) &= \ln s^3 + \ln t^{1/2} - \ln(t^2+1)^4 && \text{Ley 3} \\ &= \ln(s^3 t^{1/2}) - \ln(t^2+1)^4 && \text{Ley 1} \\ &= \ln\left(\frac{s^3\sqrt{t}}{(t^2+1)^4}\right) && \text{Ley 2} \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **49**

Advertencia Aun cuando las Leyes de Logaritmos nos dicen cómo calcular el logaritmo de un producto o un cociente, *no hay regla correspondiente para el logaritmo de una suma o una diferencia.* Por ejemplo,

$$\log_a(x+y) \cancel{=} \log_a x + \log_a y$$

De hecho, sabemos que el lado derecho es igual a $\log_a(xy)$. Del mismo modo, no simplifique incorrectamente cocientes o potencias de logaritmos. Por ejemplo,

$$\frac{\log 6}{\log 2} \cancel{=} \log\left(\frac{6}{2}\right) \qquad \text{y} \qquad (\log_2 x)^3 \cancel{=} 3\log_2 x$$

Se usan funciones logarítmicas para modelar diversas situaciones donde interviene el comportamiento humano. Uno de éstos es la rapidez con la que olvidamos cosas que hemos aprendido. Por ejemplo, si usted aprende álgebra a cierto nivel (por ejemplo 90% en un examen) y no usa álgebra durante un tiempo, ¿cuánto retendrá después de una semana, un mes o un año? Hermann Ebbinghaus (1850-1909) estudió este fenómeno y formuló la ley descrita en el ejemplo siguiente.

Olvidar lo que hemos aprendido depende de cuánto tiempo hace que lo aprendimos.

EJEMPLO 5 | La ley de olvido

Si una tarea se aprende a cierto nivel P_0, después de cierto tiempo t el nivel de recordatorio P satisface la ecuación

$$\log P = \log P_0 - c\log(t+1)$$

donde c es una constante que depende del tipo de tarea y t se mide en meses.

(a) Despeje P.

(b) Si su calificación en el examen de historia es 90, ¿qué calificación esperaría obtener en un examen similar después de dos meses? ¿Después de un año? (Suponga que $c = 0.2$.)

SOLUCIÓN

(a) Primero combinamos el lado derecho.

$$\begin{aligned} \log P &= \log P_0 - c\log(t+1) && \text{Ecuación dada} \\ \log P &= \log P_0 - \log(t+1)^c && \text{Ley 3} \\ \log P &= \log\frac{P_0}{(t+1)^c} && \text{Ley 2} \\ P &= \frac{P_0}{(t+1)^c} && \text{Porque log es biunívoco} \end{aligned}$$

(b) Aquí $P_0 = 90$, $c = 0.2$ y t se mide en meses.

En dos meses: $t = 2$ y $P = \dfrac{90}{(2+1)^{0.2}} \approx 72$

En un año: $t = 12$ y $P = \dfrac{90}{(12+1)^{0.2}} \approx 54$

Sus calificaciones esperadas después de dos meses y un año son 72 y 54, respectivamente.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

▼ Fórmula para cambio de base

Para algunos propósitos encontramos útil cambiar de logaritmos de una base a logaritmos de otra base. Suponga que nos dan $\log_a x$ y deseamos hallar $\log_b x$. Sea

$$y = \log_b x$$

Escribimos esto en forma exponencial y tomamos el logaritmo, con base a, de cada lado.

$$\begin{aligned} b^y &= x && \text{Forma exponencial} \\ \log_a(b^y) &= \log_a x && \text{Tome } \log_a \text{ de cada lado} \\ y \log_a b &= \log_a x && \text{Ley 3} \\ y &= \frac{\log_a x}{\log_a b} && \text{Divida entre } \log_a b \end{aligned}$$

Esto demuestra la siguiente fórmula.

Podemos escribir la Fórmula para Cambio para Base como

$$\log_b x = \left(\frac{1}{\log_a b}\right)\log_a x$$

Entonces $\log_a x$ es sólo un múltiplo constante de $\log_a x$; la constante es $\dfrac{1}{\log_a b}$.

FÓRMULA PARA CAMBIO DE BASE

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

En particular, si ponemos $x = a$, entonces $\log_a a$, y esta fórmula se convierte en

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Ahora podemos evaluar un logaritmo a *cualquier* base con el uso de la Fórmula para Cambio de Base, para expresar el logaritmo en términos de logaritmos comunes o logaritmos naturales y luego usar calculadora.

EJEMPLO 6 | Evaluar logaritmos con la Fórmula para Cambio de Base

Use la Fórmula para Cambio de Base y logaritmos comunes o naturales para evaluar cada logaritmo, aproximado a cinco lugares decimales.

(a) $\log_8 5$ **(b)** $\log_9 20$

SOLUCIÓN

(a) Usamos la Fórmula para Cambio de Base con $b = 8$ y $a = 10$:

$$\log_8 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 8} \approx 0.77398$$

(b) Usamos la Fórmula para Cambio de Base con $b = 9$ y $a = e$:

$$\log_9 20 = \frac{\ln 20}{\ln 9} \approx 1.36342$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **55** Y **57** ■

EJEMPLO 7 | Usar la Fórmula para Cambio de Base para graficar una función logarítmica

Use calculadora graficadora para graficar $f(x) = \log_6 x$.

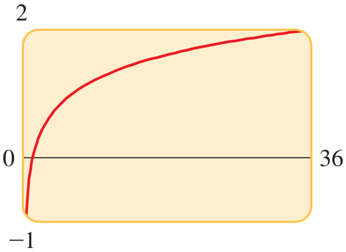


FIGURA 1 $f(x) = \log_6 x = \dfrac{\ln x}{\ln 6}$

SOLUCIÓN Las calculadoras no tienen tecla para $\log_6$, de modo que usamos la Fórmula para Cambio de Base para escribir

$$f(x) = \log_6 x = \frac{\ln x}{\ln 6}$$

Como las calculadoras tienen una tecla $\boxed{\text{LN}}$, podemos ingresar esta nueva forma de la función y graficarla. La gráfica se muestra en la Figura 1.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63**

4.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. El logaritmo de un producto de dos números es igual que la___ de los logaritmos de estos números. Por tanto, $\log_5(25 \cdot 125) =$ ___ + ____.

2. El logaritmo de un cociente de dos números es igual que la ___ de los logaritmos de estos números. Por tanto, $\log_5(\frac{25}{125}) =$ ________ − ________..

3. El logaritmo de un número elevado a una potencia es igual que la potencia _____ el logaritmo del número. Por tanto, $\log_5(25^{10}) =$ _______.

4. **(a)** Podemos expandir $\left(\dfrac{x^2 y}{z}\right)$ para obtener _______.

(b) Podemos combinar $2 \log x + \log y - \log z$ para obtener _______.

5. La mayor parte de calculadoras pueden hallar logaritmos con base ____ y base ___. Para hallar logaritmos con bases diferentes, usamos la Fórmula _____. Para Hallar $\log_7 12$, escribimos

$$\log_7 12 = \frac{\log \square}{\log \square} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

6. *¿Verdadero o falso?* Obtenemos la misma respuesta si hacemos el cálculo del Ejercicio 5 usando ln en lugar de log.

HABILIDADES

7-18 ■ Evalúe la expresión.

7. $\log_3 \sqrt{27}$ **8.** $\log_2 160 - \log_2 5$

9. $\log 4 + \log 25$ **10.** $\log \dfrac{1}{\sqrt{1000}}$

11. $\log_4 192 - \log_4 3$ **12.** $\log_{12} 9 + \log_{12} 16$

13. $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$

14. $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

15. $\log_4 16^{100}$ **16.** $\log_2 8^{33}$

17. $\log(\log 10^{10{,}000})$ **18.** $\ln(\ln e^{e^{200}})$

19-44 ■ Use las Leyes de Logaritmos para expandir la expresión.

19. $\log_2(2x)$ **20.** $\log_3(5y)$

21. $\log_2(x(x-1))$ **22.** $\log_5 \dfrac{x}{2}$

23. $\log 6^{10}$ **24.** $\ln \sqrt{z}$

25. $\log_2(AB^2)$ **26.** $\log_6 \sqrt[4]{17}$

27. $\log_3(x\sqrt{y})$ **28.** $\log_2(xy)^{10}$

29. $\log_5 \sqrt[3]{x^2+1}$ **30.** $\log_a\left(\dfrac{x^2}{yz^3}\right)$

31. $\ln \sqrt{ab}$ **32.** $\ln \sqrt[3]{3r^2 s}$

33. $\log\left(\dfrac{x^3 y^4}{z^6}\right)$ **34.** $\log\left(\dfrac{a^2}{b^4\sqrt{c}}\right)$

35. $\log_2\left(\dfrac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2-1}}\right)$ **36.** $\log_5\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

37. $\ln\left(x\sqrt{\dfrac{y}{z}}\right)$ **38.** $\ln \dfrac{3x^2}{(x+1)^{10}}$

39. $\log \sqrt[4]{x^2+y^2}$ **40.** $\log\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x}}\right)$

41. $\log\sqrt{\dfrac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3-7)^2}}$ **42.** $\log\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{z}}}$

43. $\ln\left(\dfrac{x^3\sqrt{x-1}}{3x+4}\right)$ **44.** $\log\left(\dfrac{10^x}{x(x^2+1)(x^4+2)}\right)$

45-54 ■ Use las Leyes de Logaritmos para combinar la expresión.

45. $\log_3 5 + 5\log_3 2$

46. $\log 12 + \frac{1}{2}\log 7 - \log 2$

47. $\log_2 A + \log_2 B - 2\log_2 C$

48. $\log_5(x^2-1) - \log_5(x-1)$

49. $4\log x - \frac{1}{3}\log(x^2+1) + 2\log(x-1)$

50. $\ln(a+b) + \ln(a-b) - 2\ln c$

51. $\ln 5 + 2\ln x + 3\ln(x^2+5)$

52. $2(\log_5 x + 2\log_5 y - 3\log_5 z)$

53. $\frac{1}{3}\log(x+2)^3 + \frac{1}{2}[\log x^4 - \log(x^2 - x - 6)^2]$

54. $\log_a b + c \log_a d - r \log_a s$

55-62 ■ Use la Regla para Cambio de Base y una calculadora para evaluar el logaritmo, redondeado a seis lugares decimales. Use logaritmos naturales o comunes.

55. $\log_2 5$
56. $\log_5 2$
57. $\log_3 16$
58. $\log_6 92$
59. $\log_7 2.61$
60. $\log_6 532$
61. $\log_4 125$
62. $\log_{12} 2.5$

63. Use la Fórmula para Cambio de Base para demostrar que

$$\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}$$

A continuación use este dato para trazar la gráfica de la función $f(x) = \log_3 x$.

64. Trace gráficas de la familia de funciones $y = \log_a x$ para $a = 2$, e, 5 y 10 en la misma pantalla, usando el rectángulo de vista $[0, 5]$ por $[-3, 3]$. ¿Cómo están relacionadas estas gráficas?

65. Use la Fórmula para Cambio de Base para demostrar que

$$\log e = \frac{1}{\ln 10}$$

66. Simplifique: $(\log_2 5)(\log_5 7)$

67. Demuestre que $-\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

APLICACIONES

68. Olvido Use la Ley de Olvido (Ejemplo 5) para estimar la calificación de un estudiante, en un examen de biología, dos años después que obtuvo una calificación de 80 en un examen sobre el mismo material. Suponga que $c = 0.3$ y t se mide en meses.

69. Distribución de riqueza Vilfredo Pareto (1848-1923) observó que la mayor parte de la riqueza de un país es propiedad de unos cuantos miembros de la población. El **Principio de Pareto** es

$$\log P = \log c - k \log W$$

donde W es el nivel de riqueza (cuánto dinero tiene una persona) y P es el número de personas de la población que tiene ese dinero.

(a) De esa ecuación, despeje P.

(b) Suponga que $k = 2.1$, $c = 8000$, y W se mide en millones de dólares. Use la parte (a) para hallar el número de personas que tienen \$2 millones de dólares o más. ¿Cuántas personas tienen \$10 millones de dólares o más?

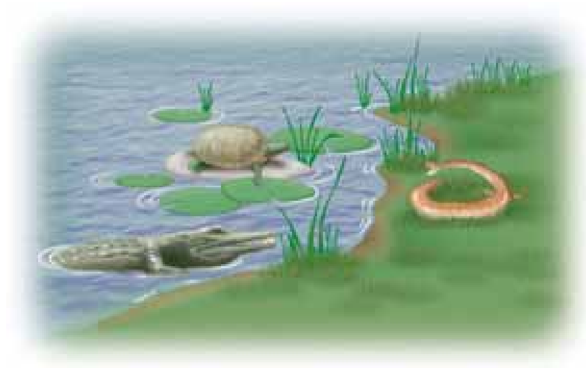
70. Diversidad Algunos biólogos modelan el número de especies S en un área fija A (por ejemplo una isla) con la relación especie-área

$$\log S = \log c + k \log A$$

donde c y k son constantes positivas que dependen del tipo de especie y hábitat.

(a) De la ecuación, despeje S.

(b) Use la parte (a) para demostrar que si $k = 3$, entonces duplicar el área aumenta ocho veces el número de especies.



71. Magnitud de estrellas La magnitud M de una estrella es una medida del brillo que una estrella parece tener a la vista del hombre. Está definida como

$$M = -2.5 \log\left(\frac{B}{B_0}\right)$$

donde B es el brillo real de la estrella y B_0 es una constante.

(a) Expanda el lado derecho de la ecuación.

(b) Use la parte (a) para demostrar que cuanto más brillante sea una estrella, menor es su magnitud.

(c) Betelgeuse es unas 100 veces más brillante que Albiero. Use la parte (a) para demostrar que Betelgeuse es 5 magnitudes menos brillante que Albiero.

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

72. ¿Verdadero o falso? Discuta cada una de las ecuaciones siguientes y determine si es verdadera para todos los valores posibles de las variables. (Ignore valores de las variables para las que cualquier término no esté definido.)

(a) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log x}{\log y}$

(b) $\log_2(x - y) = \log_2 x - \log_2 y$

(c) $\log_5\left(\frac{a}{b^2}\right) = \log_5 a - 2\log_5 b$

(d) $\log 2^z = z \log 2$

(e) $(\log P)(\log Q) = \log P + \log Q$

(f) $\frac{\log a}{\log b} = \log a - \log b$

(g) $(\log_2 7)^x = x \log_2 7$

(h) $\log_a a^a = a$

(i) $\log(x - y) = \frac{\log x}{\log y}$

(j) $-\ln\left(\frac{1}{A}\right) = \ln A$

73. Encuentre el error ¿Qué está mal en el siguiente argumento?

$$\begin{aligned} \log 0.1 &< 2 \log 0.1 \\ &= \log(0.1)^2 \\ &= \log 0.01 \\ \log 0.1 &< \log 0.01 \\ 0.1 &< 0.01 \end{aligned}$$

74. Desplazamiento, contracción y alargamiento de gráficas de funciones Sea $f(x) = x^2$. Demuestre que $f(2x) = 4f(x)$ y explique la forma en que esto demuestra que la contracción de la gráfica de f, horizontalmente, tiene el mismo efecto que alargarla verticalmente. A continuación use las identidades $e^{2+x} = e^2e^x$ y $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$ para demostrar que para $g(x) = e^x$ un desplazamiento horizontal es igual que un alargamiento vertical y para $h(x) = \ln x$ una contracción horizontal es lo mismo que un desplazamiento vertical.

4.5 ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Ecuaciones exponenciales ▶ Ecuaciones logarítmicas ▶ Interés compuesto

En esta sección resolvemos ecuaciones que contienen funciones exponenciales o logarítmicas. Las técnicas que desarrollamos aquí se usarán en la siguiente sección para resolver problemas aplicados.

▼ Ecuaciones exponenciales

Una *ecuación exponencial* es aquella en la que la variable aparece en el exponente. Por ejemplo,

$$2^x = 7$$

La variable x presenta una dificultad porque está en el exponente. Para resolver esta dificultad, tomamos el logaritmo de cada lado y luego usamos las Leyes de Logaritmos para "bajar x" del exponente.

$$\begin{aligned} 2^x &= 7 && \text{Ecuación dada} \\ \ln 2^x &= \ln 7 && \text{Tome ln de cada lado} \\ x \ln 2 &= \ln 7 && \text{Ley 3 (bajar exponente)} \\ x &= \frac{\ln 7}{\ln 2} && \text{Despeje } x \\ &\approx 2.807 && \text{Calculadora} \end{aligned}$$

Recuerde que la Ley 3 de las Leyes de Logaritmos dice que $\log_a A^C = C \log_a A$.

El método que usamos para resolver $2^x = 7$ es típico de cómo resolvemos ecuaciones exponenciales en general.

GUÍAS PARA RESOLVER ECUACIONES EXPONENCIALES

1. Aísle la expresión exponencial en un lado de la ecuación.
2. Tome el logaritmo de cada lado y a continuación use las Leyes de Logaritmos para "bajar el exponente".
3. Despeje la variable.

EJEMPLO 1 | Resolver una ecuación exponencial

Encuentre la solución de la ecuación $3^{x+2} = 7$, redondeada a seis lugares decimales.

SOLUCIÓN Tomamos el logaritmo común de cada lado y usamos la Ley 3.

$$\begin{aligned} 3^{x+2} &= 7 && \text{Ecuación dada} \\ \log(3^{x+2}) &= \log 7 && \text{Tome log de cada lado} \\ (x+2)\log 3 &= \log 7 && \text{Ley 3 (bajar exponente)} \\ x+2 &= \frac{\log 7}{\log 3} && \text{Divida entre log 3} \\ x &= \frac{\log 7}{\log 3} - 2 && \text{Reste 2} \\ &\approx -0.228756 && \text{Calculadora} \end{aligned}$$

Podríamos haber usado logaritmos naturales en lugar de logaritmos comunes. De hecho, usando los mismos pasos, obtenemos

$$x = \frac{\ln 7}{\ln 3} - 2 \approx -0.228756$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Sustituyendo $x = -0.228756$ en la ecuación original y usando calculadora, obtenemos

$$3^{(-0.228756)+2} \approx 7 \quad ✔$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7**

EJEMPLO 2 | Resolver una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $8e^{2x} = 20$.

SOLUCION Primero dividimos entre 8 para aislar el término exponencial en un lado de la ecuación.

$$\begin{aligned} 8e^{2x} &= 20 && \text{Ecuación dada} \\ e^{2x} &= \tfrac{20}{8} && \text{Divida entre 8} \\ \ln e^{2x} &= \ln 2.5 && \text{Tome ln de cada lado} \\ 2x &= \ln 2.5 && \text{Propiedad de ln} \\ x &= \frac{\ln 2.5}{2} && \text{Divida entre 2} \\ &\approx 0.458 && \text{Calculadora} \end{aligned}$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Sustituyendo $x = 0.458$ en la ecuación original y utilizando una calculadora, tenemos

$$8e^{2(0.458)} \approx 20 \quad ✔$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9**

EJEMPLO 3 | Resolver una ecuación exponencial de forma algebraica y gráfica

Resuelva la ecuación $e^{3-2x} = 4$ de manera algebraica y gráfica.

SOLUCIÓN 1: Algebraica

Como la base del término exponencial es e, usamos logaritmos naturales para resolver esta ecuación.

$$\begin{aligned} e^{3-2x} &= 4 && \text{Ecuación dada} \\ \ln(e^{3-2x}) &= \ln 4 && \text{Tome ln de cada lado} \\ 3-2x &= \ln 4 && \text{Propiedad de ln} \\ -2x &= -3 + \ln 4 && \text{Reste 3} \\ x &= \tfrac{1}{2}(3 - \ln 4) \approx 0.807 && \text{Multiplique por } -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Es necesario verificar que esta respuesta satisfaga la ecuación original.

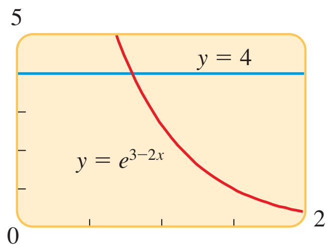


FIGURA 1

SOLUCIÓN 2: Gráfica

Graficamos las ecuaciones $y = e^{3-2x}$ y $y = 4$ en el mismo rectángulo de vista como en la Figura 1. Las soluciones se presentan donde las gráficas se intersecan. Si hacemos acercamiento (zoom) en el punto de intersección de las dos gráficas, vemos que $x \approx 0.81$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11** ■

EJEMPLO 4 | Una ecuación exponencial de tipo cuadrático

Resuelva la ecuación $e^{2x} - e^x - 6 = 0$.

SOLUCIÓN Para aislar el término exponencial, factorizamos.

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$(e^x)^2 - e^x - 6 = 0 \qquad \text{Ley de Exponentes}$$

$$(e^x - 3)(e^x + 2) = 0 \qquad \text{Factorice (un cuadrático en } e^x\text{)}$$

$$e^x - 3 = 0 \quad \text{o bien} \quad e^x + 2 = 0 \qquad \text{Propiedad del Producto Cero}$$

$$e^x = 3 \qquad\qquad e^x = -2$$

Si hacemos $w = e^x$, obtenemos la ecuación cuadrática

$$w^2 - w - 6 = 0$$

que se factoriza como

$$(w - 3)(w + 2) = 0$$

La ecuación $e^x = 3$ lleva a $x = \ln 3$. Pero la ecuación $e^x = -2$ no tiene solución porque $e^x > 0$ para toda x. Entonces, $x = \ln 3 \approx 1.0986$ es la única solución. Es necesario comprobar que esta respuesta satisfaga la ecuación original.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29** ■

EJEMPLO 5 | Resolver una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $3xe^x + x^2e^x = 0$.

SOLUCIÓN Primero factorizamos el lado izquierdo de la ecuación.

$$3xe^x + x^2e^x = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$x(3 + x)e^x = 0 \qquad \text{Factorizamos factores comunes}$$

$$x(3 + x) = 0 \qquad \text{Dividimos entre } e^x \text{ (porque } e^x \neq 0\text{)}$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad 3 + x = 0 \qquad \text{Propiedad del Producto Cero}$$

Entonces las soluciones son $x = 0$ y $x = -3$.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 0$:

$3(0)e^0 + 0^2e^0 = 0$ ✔

$x = -3$:

$3(-3)e^{-3} + (-3)^2e^{-3}$

$= -9e^{-3} + 9e^{-3} = 0$ ✔

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **33** ■

La **determinación de la edad por radiocarbono** es un método que los arqueólogos usan para determinar la edad de objetos antiguos. El dióxido de carbono en la atmósfera siempre contiene una fracción fija de carbono radiactivo, carbono 14 (^{14}C), con una vida media de unos 5730 años. Las plantas absorben dióxido de carbono de la atmósfera, que luego pasa a los animales a través de la cadena alimentaria. Entonces, todos los seres vivientes contienen las mismas proporciones fijas entre ^{14}C y ^{12}C no radiactivo como la atmósfera.

Después que un organismo muere, deja de asimilar ^{14}C y la cantidad de ^{14}C en su interior empieza a desintegrarse exponencialmente. Podemos entonces determinar el tiempo transcurrido desde la muerte del organismo si medimos la cantidad de ^{14}C que tenga.

Por ejemplo, si el hueso de un borrico que murió hace t años contiene 73% del ^{14}C que tenga uno vivo, entonces por la fórmula para desintegración radiactiva (Sección 4.6),

$$0.73 = (1.00)e^{-(t \ln 2)/5730}$$

Resolvemos esta ecuación exponencial para hallar $t \approx 2600$, de modo que el hueso tiene unos 2600 años de antigüedad.

Ecuaciones logarítmicas

Una *ecuación logarítmica* es aquella en la que aparece un logaritmo de la variable. Por ejemplo,

$$\log_2(x + 2) = 5$$

Para despejar x, escribimos la ecuación en forma exponencial

$$x + 2 = 2^5 \qquad \text{Forma exponencial}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \qquad \text{Despeje } x$$

Otra forma de ver el primer paso es elevar la base, 2, a cada lado de la ecuación.

$$2^{\log_2(x+2)} = 2^5 \qquad \text{Eleve 2 a cada lado}$$

$$x + 2 = 2^5 \qquad \text{Propiedad de logaritmos}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \qquad \text{Despeje } x$$

El método empleado para resolver este sencillo problema es típico. Resumimos los pasos como sigue:

GUÍAS PARA RESOLVER ECUACIONES LOGARÍTMICAS

1. Aísle el término logarítmico en un lado de la ecuación; es posible que primero sea necesario combinar los términos logarítmicos.
2. Escriba la ecuación en forma exponencial (o elevar la base a cada lado de la ecuación).
3. Despeje la variable.

EJEMPLO 6 | Resolver ecuaciones logarítmicas

De cada ecuación, despeje x.

(a) $\ln x = 8$ **(b)** $\log_2(25 - x) = 3$

SOLUCIÓN

(a)

$$\ln x = 8 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$x = e^8 \qquad \text{Forma exponencial}$$

Por lo tanto, $x = e^8 \approx 2981$.

También podemos resolver este problema en otra forma:

$$\ln x = 8 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$e^{\ln x} = e^8 \qquad \text{Eleve } e \text{ a cada lado}$$

$$x = e^8 \qquad \text{Propiedad de ln}$$

(b) El primer paso es reescribir la ecuación en forma exponencial.

$$\log_2(25 - x) = 3 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$25 - x = 2^3 \qquad \text{Forma exponencial (o eleve 2 a cada lado)}$$

$$25 - x = 8$$

$$x = 25 - 8 = 17$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Si $x = 17$, tenemos

$\log_2(25 - 17) = \log_2 8 = 3$ ✔

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **37** Y **41** ■

EJEMPLO 7 | Resolver una ecuación logarítmica

Resuelva la ecuación $4 + 3\log(2x) = 16$.

SOLUCIÓN Primero aislamos el término logarítmico. Esto nos permite escribir la ecuación en forma exponencial.

$$\begin{aligned} 4 + 3\log(2x) &= 16 && \text{Ecuación dada} \\ 3\log(2x) &= 12 && \text{Reste 4} \\ \log(2x) &= 4 && \text{Divida entre 3} \\ 2x &= 10^4 && \text{Forma exponencial (o eleve 10 a cada lado)} \\ x &= 5000 && \text{Divida entre 2} \end{aligned}$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Si $x = 5000$, obtenemos

$$\begin{aligned} 4 + 3\log 2(5000) &= 4 + 3\log 10{,}000 \\ &= 4 + 3(4) \\ &= 16 \quad ✔ \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **43**

EJEMPLO 8 | Resolver algebraica y gráficamente una ecuación logarítmica

Resuelva algebraica y gráficamente la ecuación $\log(x + 2) + \log(x - 1) = 1$.

SOLUCIÓN 1: Algebraica

Primero combinamos los términos logarítmicos, usando las Leyes de Logaritmos.

$$\begin{aligned} \log[(x + 2)(x - 1)] &= 1 && \text{Ley 1} \\ (x + 2)(x - 1) &= 10 && \text{Forma exponencial (o eleve 10 a cada lado)} \\ x^2 + x - 2 &= 10 && \text{Expanda lado izquierdo} \\ x^2 + x - 12 &= 0 && \text{Reste 10} \\ (x + 4)(x - 3) &= 0 && \text{Factorice} \end{aligned}$$

$$x = -4 \qquad \text{o} \qquad x = 3$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = -4$:

$$\begin{aligned} &\log(-4 + 2) + \log(-4 - 1) \\ &\quad = \log(-2) + \log(-5) \\ &\qquad \text{no definido} \quad ✘ \end{aligned}$$

$x = 3$:

$$\begin{aligned} &\log(3 + 2) + \log(3 - 1) \\ &\quad = \log 5 + \log 2 = \log(5 \cdot 2) \\ &\quad = \log 10 = 1 \quad ✔ \end{aligned}$$

Verificamos estas potenciales soluciones en la ecuación original y encontramos que $x = -4$ no es una solución (porque los logaritmos de números negativos no están definidos), pero $x = 3$ es una solución. (Vea *Verifique sus respuestas.*)

SOLUCIÓN 2: Gráfica

Primero movemos todos los términos a un lado de la ecuación:

$$\log(x + 2) + \log(x - 1) - 1 = 0$$

A continuación graficamos

$$y = \log(x + 2) + \log(x - 1) - 1$$

como en la Figura 2. Las soluciones son los puntos de intersección x de la gráfica. Entonces, la única solución es $x \approx 3$.

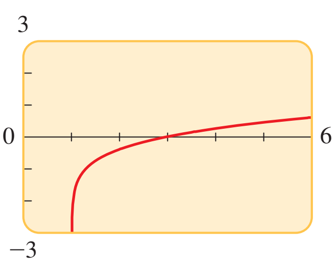


FIGURA 2

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **49**

En el Ejemplo 9 no es posible aislar x algebraicamente, de modo que debemos resolver gráficamente la ecuación.

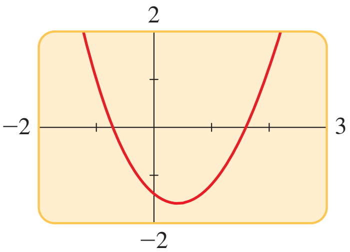


FIGURA 3

EJEMPLO 9 | Resolver gráficamente una ecuación logarítmica

Resuelva la ecuación $x^2 = 2\ln(x+2)$.

SOLUCIÓN Primero movemos todos los términos a un lado de la ecuación.

$$x^2 - 2\ln(x+2) = 0$$

Entonces graficamos

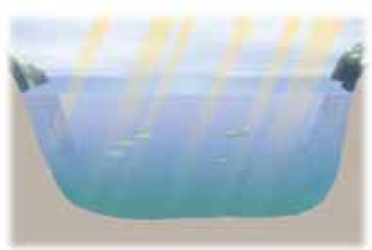
$$y = x^2 - 2\ln(x+2)$$

como en la Figura 3. Las soluciones son los puntos de intersección x de la gráfica. Si hacemos zoom en los puntos de intersección x, vemos que hay dos soluciones

$$x \approx -0.71 \qquad \text{y} \qquad x \approx 1.60$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59**

Se usan ecuaciones logarítmicas para determinar la cantidad de luz que llega a diversas profundidades en un lago. (Esta información ayuda a biólogos a determinar los tipos de fauna que un lago puede soportar.) Cuando pasa luz por el agua (u otros materiales transparentes como vidrio o plástico), parte de la luz es absorbida. Es fácil ver que cuanto más turbia sea el agua, más luz se absorbe. La relación exacta entre absorción de luz y la distancia que viaja la luz en un material está descrita en el siguiente ejemplo.



La intensidad de la luz en un lago disminuye con la profundidad.

EJEMPLO 10 | Transparencia de un lago

Si I_0 e I denotan la intensidad de luz antes y después de pasar por un material y x es la distancia (en pies) que la luz se desplaza en el material, entonces, de acuerdo con la **Ley de Beer-Lambert**,

$$-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = x$$

donde k es una constante que depende del tipo de material.

(a) Despeje I de la ecuación

(b) Para cierto lago, $k = 0.025$, y la intensidad de la luz es $I_0 = 14$ lumen (lm). Encuentre la intensidad de luz a una profundidad de 20 pies.

SOLUCIÓN

(a) Primero aislamos el término logarítmico.

$$-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = x \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -kx \qquad \text{Multiplique por } -k$$

$$\frac{I}{I_0} = e^{-kx} \qquad \text{Forma exponencial}$$

$$I = I_0 e^{-kx} \qquad \text{Multiplique por } I_0$$

(b) Encontramos I usando la fórmula de la parte (a).

$$\begin{aligned} I &= I_0 e^{-kx} && \text{De la parte (a)} \\ &= 14e^{(-0.025)(20)} && I_0 = 14,\ k = 0.025,\ x = 20 \\ &\approx 8.49 && \text{Calculadora} \end{aligned}$$

La intensidad de luz a una profundidad de 20 pies es alrededor de 8.5 lm.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **85**

Interés compuesto

Recuerde las fórmulas para interés que hallamos en la Sección 4.1. Si un principal P se invierte a una tasa de interés r durante un tiempo de t años, entonces la cantidad A de la inversión está dada por

$$A = P(1 + r) \qquad \text{Interés simple (para un año)}$$

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \qquad \text{Interés capitalizado } n \text{ veces por año}$$

$$A(t) = Pe^{rt} \qquad \text{Interés capitalizado continuamente}$$

Podemos usar logaritmos para determinar el tiempo que tarda el principal en aumentar a una cantidad dada.

EJEMPLO 11 | Hallar el tiempo para que una inversión se duplique

Una suma de \$5000 se invierte a una tasa de interés del 5% al año. Encuentre el tiempo necesario para que el dinero se duplique si el interés se capitaliza de acuerdo con el siguiente método.

(a) Semestralmente **(b)** Continuamente

SOLUCIÓN

(a) Usamos la fórmula para interés compuesto con $P = \$5000$, $A(t) = \$10{,}000$, $r = 0.05$ y $n = 2$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos t.

$$
\begin{aligned}
5000\left(1 + \frac{0.05}{2}\right)^{2t} &= 10{,}000 && P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = A \\
(1.025)^{2t} &= 2 && \text{Divida entre 5000} \\
\log 1.025^{2t} &= \log 2 && \text{Tome log de cada lado} \\
2t \log 1.025 &= \log 2 && \text{Ley 3 (baje el exponente)} \\
t &= \frac{\log 2}{2 \log 1.025} && \text{Divida entre 2 log 1.025} \\
t &\approx 14.04 && \text{Calculadora}
\end{aligned}
$$

El dinero se duplicará en 14.04 años.

(b) Usamos la fórmula para interés capitalizado continuamente con $P = \$5000$, $A(t) = \$10{,}000$ y $r = 0.05$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos t.

$$
\begin{aligned}
5000e^{0.05t} &= 10{,}000 && Pe^{rt} = A \\
e^{0.05t} &= 2 && \text{Divida entre 5000} \\
\ln e^{0.05t} &= \ln 2 && \text{Tome ln de cada lado} \\
0.05t &= \ln 2 && \text{Propiedad de ln} \\
t &= \frac{\ln 2}{0.05} && \text{Divida entre 0.05} \\
t &\approx 13.86 && \text{Calculadora}
\end{aligned}
$$

El dinero se duplicará en 13.86 años.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **75**

EJEMPLO 12 | Tiempo necesario para crecer una inversión

Una suma de \$1000 se invierte a una tasa de interés de 4% al año. Encuentre el tiempo necesario para que la cantidad crezca a \$4000 si el interés se capitaliza continuamente.

SOLUCIÓN Usamos la fórmula para interés capitalizado continuamente con $P = \$1000$, $A(t) = \$4000$ y $r = 0.04$ y de la ecuación exponencial resultante se despeja t.

$$\begin{aligned} 1000e^{0.04t} &= 4000 && Pe^{rt} = A \\ e^{0.04t} &= 4 && \text{Divida entre 1000} \\ 0.04t &= \ln 4 && \text{Tome ln de cada lado} \\ t &= \frac{\ln 4}{0.04} && \text{Divida entre 0.04} \\ t &\approx 34.66 && \text{Calculadora} \end{aligned}$$

La cantidad será $4000 en 34 años y 8 meses.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **77**

4.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Resolvamos la ecuación exponencial $2e^x = 50$.

(a) Primero, aislamos e^x para obtener la ecuación equivalente___.

(b) A continuación, tomamos ln de cada lado para obtener la ecuación equivalente _____.

(c) Ahora usamos una calculadora para hallar $x =$ _____.

2. Resolvamos la ecuación logarítmica

$\log 3 + \log(x - 2) = \log x$.

(a) Primero, combinamos los logaritmos para obtener la ecuación equivalente_______.

(b) A continuación, escribimos cada lado en forma exponencial para obtener la ecuación equivalente______.

(c) Ahora encontramos $x =$ _______.

HABILIDADES

3-28 ■ Encuentre la solución de la ecuación exponencial, redondeada a cuatro lugares decimales.

3. $10^x = 25$ **4.** $10^{-x} = 4$

5. $e^{-2x} = 7$ **6.** $e^{3x} = 12$

7. $2^{1-x} = 3$ **8.** $3^{2x-1} = 5$

9. $3e^x = 10$ **10.** $2e^{12x} = 17$

11. $e^{1-4x} = 2$ **12.** $4(1 + 10^{5x}) = 9$

13. $4 + 3^{5x} = 8$ **14.** $2^{3x} = 34$

15. $8^{0.4x} = 5$ **16.** $3^{x/14} = 0.1$

17. $5^{-x/100} = 2$ **18.** $e^{3-5x} = 16$

19. $e^{2x+1} = 200$ **20.** $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 75$

21. $5^x = 4^{x+1}$ **22.** $10^{1-x} = 6^x$

23. $2^{3x+1} = 3^{x-2}$ **24.** $7^{x/2} = 5^{1-x}$

25. $\dfrac{50}{1 + e^{-x}} = 4$ **26.** $\dfrac{10}{1 + e^{-x}} = 2$

27. $100(1.04)^{2t} = 300$ **28.** $(1.00625)^{12t} = 2$

29-36 ■ Resuelva la ecuación.

29. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ **30.** $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

31. $e^{4x} + 4e^{2x} - 21 = 0$ **32.** $e^x - 12e^{-x} - 1 = 0$

33. $x^2 2^x - 2^x = 0$ **34.** $x^2 10^x - x10^x = 2(10^x)$

35. $4x^3 e^{-3x} - 3x^4 e^{-3x} = 0$ **36.** $x^2 e^x + xe^x - e^x = 0$

37-54 ■ De la ecuación logarítmica despeje x.

37. $\ln x = 10$ **38.** $\ln(2 + x) = 1$

39. $\log x = -2$ **40.** $\log(x - 4) = 3$

41. $\log(3x + 5) = 2$ **42.** $\log_3(2 - x) = 3$

43. $4 - \log(3 - x) = 3$ **44.** $\log_2(x^2 - x - 2) = 2$

45. $\log_2 3 + \log_2 x = \log_2 5 + \log_2(x - 2)$

46. $2 \log x = \log 2 + \log(3x - 4)$

47. $\log x + \log(x - 1) = \log(4x)$

48. $\log_5 x + \log_5(x + 1) = \log_5 20$

49. $\log_5(x + 1) - \log_5(x - 1) = 2$

50. $\log_3(x + 15) - \log_3(x - 1) = 2$

51. $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$

52. $\log x + \log(x - 3) = 1$

53. $\log_9(x - 5) + \log_9(x + 3) = 1$

54. $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = 1$

55. ¿Para qué valor de x es verdadero lo siguiente?

$$\log(x + 3) = \log x + \log 3$$

56. ¿Para qué valor de x es verdadero que $(\log x)^3 = 3 \log x$?

57. Despeje x: $2^{2/\log_5 x} = \frac{1}{16}$

58. Despeje x: $\log_2(\log_3 x) = 4$

59-66 ■ Use calculadora graficadora para hallar todas las soluciones de la ecuación, redondeadas a dos lugares decimales.

59. $\ln x = 3 - x$ **60.** $\log x = x^2 - 2$

61. $x^3 - x = \log(x + 1)$ **62.** $x = \ln(4 - x^2)$

63. $e^x = -x$ **64.** $2^{-x} = x - 1$

65. $4^{-x} = \sqrt{x}$ **66.** $e^{x^2} - 2 = x^3 - x$

67-70 ■ Resuelva la desigualdad.

67. $\log(x - 2) + \log(9 - x) < 1$

68. $3 \le \log_2 x \le 4$

69. $2 < 10^x < 5$ **70.** $x^2 e^x - 2e^x < 0$

71-74 ■ Encuentre la función inversa de f.

71. $f(x) = 2^{2x}$ **72.** $f(x) = 3^{x+1}$

73. $f(x) = \log_2(x - 1)$ **74.** $f(x) = \log 3x$

APLICACIONES

75. Interés compuesto Un hombre invierte $5000 en una cuenta que paga 8.5% de interés por año, capitalizado trimestralmente.
(a) Encuentre la cantidad después de 3 años.
(b) ¿Cuánto tiempo tomará para que la inversión se duplique?

76. Interés compuesto Una mujer invierte $6500 en una cuenta que paga 6% de interés por año, capitalizado continuamente.
(a) ¿Cuál es la cantidad después de 2 años?
(b) ¿Cuánto tiempo tomará para que la cantidad sea $8000?

77. Interés compuesto Encuentre el tiempo necesario para que una inversión de $5000 crezca a $8000 a una tasa de interés de 7.5% por año, capitalizado trimestralmente.

78. Interés compuesto Nancy desea invertir $4000 en certificados de ahorro que pagan una tasa de interés de 9.75% por año, capitalizado semestralmente. ¿Cuánto tiempo debe ella escoger para ahorrar una cantidad de $5000?

79. Duplicar una inversión ¿Cuánto tiempo tardará una inversión de $1000 en duplicar su valor, si la tasa de interés es 8.5% por año, capitalizado continuamente?

80. Tasa de interés Una suma de $1000 se invirtió durante 4 años, y el interés se capitalizó semestralmente. Si esta suma ascendió a $1435.77 en el tiempo dado, ¿cuál fue la tasa de interés?

81. Desintegración radiactiva Una muestra de 15 g de yodo radiactivo se desintegra en forma tal que la masa restante después de t días está dada por $m(t) = 15e^{-0.087t}$, donde $m(t)$ se mide en gramos. ¿Después de cuántos días quedan sólo 5 gramos?

82. Paracaidismo La velocidad de un paracaidista t segundos después de saltar está dada por $v(t) = 80(1 - e^{-0.2t})$. ¿Después de cuántos segundos será de 70 pies/s la velocidad?

83. Población de peces En un pequeño lago se introduce cierta especie de peces. La población de peces está modelada por la función

$$P = \frac{10}{1 + 4e^{-0.8t}}$$

donde P es el número de peces en miles y t se mide en años desde que el lago fue poblado por estos peces.
(a) Encuentre la población de peces después de 3 años.
(b) ¿Después de cuántos años la población de peces llegará a 5000?

84. Transparencia de un lago Científicos ambientalistas miden la intensidad de luz a varias profundidades en un lago, para hallar la "transparencia" del agua. Ciertos niveles de transparencia se requieren para la biodiversidad de la población macroscópica sumergida. En cierto lago, la intensidad de luz a una profundidad x está dada por

$$I = 10e^{-0.008x}$$

donde I se mide en lumen y x en pies.
(a) Encuentre la intensidad I a una profundidad de 30 pies.
(b) ¿A qué profundidad la intensidad de luz habrá bajado a $I = 5$?

85. Presión atmosférica La presión atmosférica P (en kilopascals, kPa) a una altitud h (en kilómetros, km) está regida por la fórmula

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{h}{k}$$

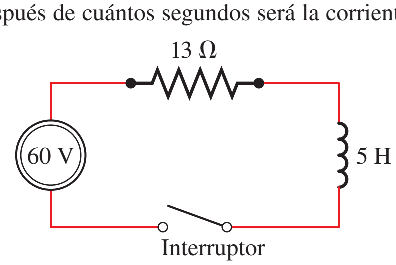
donde $k = 7$ y $P_0 = 100$ kPa son constantes.
(a) De la ecuación, despeje P.
(b) Use la parte (a) para hallar la presión P a una altitud de 4 km.

86. Enfriamiento de un motor Supongamos que el lector está manejando su auto en un frío día de invierno (20ºF al exterior) y el motor se sobrecalienta (a unos 220ºF). Cuando se estaciona, el motor empieza a enfriarse. La temperatura T del motor t minutos después de estacionarlo satisface la ecuación

$$\ln\left(\frac{T - 20}{200}\right) = -0.11t$$

(a) De la ecuación, despeje T.
(b) Use la parte (a) para hallar la temperatura del motor después de 20 minutos $(t = 20)$.

87. Circuitos eléctricos Un circuito eléctrico contiene una batería que produce un voltaje de 60 volts (V), un resistor con una resistencia de 13 ohms (Ω), y un inductor con una inductancia de 5 henrys (H), como se muestra en la figura. Usando cálculo, se puede demostrar que la corriente $I = I(t)$ (en amperes, A) t segundos después de cerrar el interruptor es $I = \frac{60}{13}(1 - e^{-13t/5})$.
(a) Use la ecuación para expresar el tiempo t como función de la corriente I.
(b) ¿Después de cuántos segundos será la corriente de 2 A?



88. Curva de aprendizaje Una *curva de aprendizaje* es una gráfica de una función $P(t)$ que mide el rendimiento de alguien que aprende una disciplina como función del tiempo t de capacitación. Al principio, la rapidez de aprendizaje es alta. Entonces, a medida que el rendimiento aumenta y se aproxima a un valor máximo M, la rapidez de aprendizaje disminuye. Se ha encontrado que la función

$$P(t) = M - Ce^{-kt}$$

donde k y C son constantes positivas y $C < M$ es un modelo razonable para aprendizaje.

(a) Exprese el tiempo de aprendizaje t como función del nivel de rendimiento P.

(b) Para un atleta de salto con pértiga en entrenamiento, la curva de aprendizaje está dada por

$$P(t) = 20 - 14e^{-0.024t}$$

donde $P(t)$ es la altura que él es capaz de saltar con pértiga después de t meses. ¿Después de cuántos meses de aprendizaje podrá saltar 12 pies?

(c) Trace una gráfica de la curva de aprendizaje de la parte (b).

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

89. Estimar una solución Sin resolver realmente la ecuación, encuentre dos números enteros entre los cuales debe estar la solución de $9^x = 20$. Haga lo mismo para $9^x = 100$. Explique cómo ha llegado a esa conclusión.

90. Una ecuación sorprendente Tome logaritmos para demostrar que la ecuación

$$x^{1/\log x} = 5$$

no tiene solución. ¿Para qué valores de k tiene solución la ecuación

$$x^{1/\log x} = k?$$

¿Qué nos dice esto acerca de la gráfica de la función $f(x) = x^{1/\log x}$? Confirme su respuesta usando una calculadora graficadora.

91. Ecuaciones disfrazadas Cada una de estas ecuaciones se puede transformar en una ecuación de tipo lineal o cuadrático si se aplica la sugerencia. Resuelva cada ecuación.

(a) $(x - 1)^{\log(x-1)} = 100(x - 1)$ [Tome log de cada lado.]

(b) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$ [Cambie todos los log a base 2.]

(c) $4^x - 2^{x+1} = 3$ [Escriba como cuadrática en 2^x.]

4.6 MODELADO CON FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Crecimiento exponencial (tiempo de duplicación) ▶ Crecimiento exponencial (tasa de crecimiento relativa) ▶ Desintegración radiactiva ▶ Ley de Newton de Enfriamiento ▶ Escalas logarítmicas

Un gran número de procesos que se presentan en la naturaleza, por ejemplo el crecimiento poblacional, la desintegración radiactiva, la difusión de calor y otros muchos, se pueden modelar usando funciones exponenciales. Se usan funciones logarítmicas en modelos para la intensidad de sonidos, la intensidad de terremotos y otros numerosos fenómenos. En esta sección estudiamos modelos exponenciales y logarítmicos.

▼ Crecimiento exponencial (tiempo de duplicación)

Supóngase que empezamos con una sola bacteria, que se divide cada hora. Después de una hora tenemos 2 bacterias, después de dos horas tenemos 2^2 o sea 4 bacterias, después de tres horas tenemos 2^3 o sea 8 bacterias, y así sucesivamente (vea Figura 1). Vemos que podemos modelar la población de bacterias después de t horas, por medio de $f(t) = 2^t$.

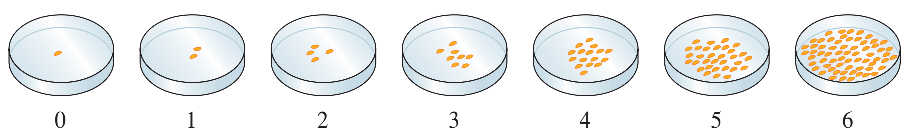


FIGURA 1 Población de bacterias