

**Universidad Nacional del Litoral**

Secretaría Académica

Dirección de Articulación, Ingreso y Permanencia

Año 2014



---

# **Físico-química biológica**

# Unidad 1. Conceptos básicos de Matemática

Emiliano Chaves / Diego Manni

---

*Quería pensar que todo era falso, era necesario que yo, que lo pensaba, fuese algo. Y notando que esta verdad: Yo pienso, por lo tanto soy era tan firme y cierta, que no podían quebrantarlas ni las más extravagantes suposiciones de los escépticos.*

René Descartes (1596-1650), filósofo, físico y matemático.

## Introducción

Este capítulo corresponde al desarrollo de los conocimientos básicos y necesarios en matemática que debe poseer para comprender los contenidos de este libro.

Lo primero que se suele pensar al hablar de matemática es en números, pero para que no sea confusa su utilización es necesario definir algunos conceptos, para lo que se utilizarán algunas situaciones relacionadas a la Medicina.

*Una persona en situación de calle fue internada por hipotermia leve (34,5°C) debido a la ola polar que bajó la temperatura en la noche santafecina a 3°C bajo cero. Consultados los médicos recordaron que si bien la temperatura normal del cuerpo varía según la persona, la edad, la actividad y el momento del día se acepta que la temperatura corporal normal promedio generalmente es de 37°C.*

Si se representa la temperatura en una hoja de papel lo que se obtiene es una recta, donde se inscriben una serie de puntos equidistantes.

Con la temperatura corporal podría comenzarse a esbozar una definición para el primer conjunto de números.

### 1.1. Números naturales, enteros, racionales e irracionales

---

Números naturales: El conjunto de números naturales  $\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{N}$  está formado por los infinitos números enteros positivos (mayores que cero) ordenados de manera creciente desde el 1.

---

Si a este conjunto le agregamos el cero se simboliza  $\mathbb{N}_0$ .

Ahora si analiza el problema encuentra que la temperatura ambiental fue menor a  $0^\circ\text{C}$  por lo que no pertenece a este conjunto sino al de:

---

Números negativos: El conjunto de números enteros negativos  $\mathbb{Z}^-$  está formado por los infinitos números enteros menores que cero representados anteponiéndoles un símbolo menos y ordenados de manera decreciente desde el -1.

---

Si unimos estos dos grupos de números y agregamos el cero se obtiene:

---

Números enteros: El conjunto de números enteros  $\mathbb{Z}$  está formado por los números enteros positivos que se ordenan en la recta de manera creciente hacia la derecha del cero y los números enteros negativos que se ordenan de manera decreciente hacia la izquierda del cero

---

Un número negativo en el conjunto de números enteros representado en una recta simboliza el opuesto de su entero positivo. Por lo tanto -3 es el opuesto de +3; y ambos se encuentran a la misma distancia del 0, o sea 3 unidades.

---

Valor absoluto: El valor absoluto simbolizado  $|x|$  es la distancia que separa a ese número del cero en la recta numérica.

---

Ahora usted recordará que había números que no eran enteros y denominaba “fracciones” que no son otra cosa más que una división.

---

Números racionales: El conjunto de números enteros  $\mathbb{Q}$  está formado por los números que resulta del cociente entre dos enteros donde el denominador es distinto de 0 enteros positivos que se ordenan en la recta de manera.

---

Como se puede observar este conjunto de números engloba a los números naturales y a los números enteros ya que cualquiera de los anteriores se puede escribir como una fracción:

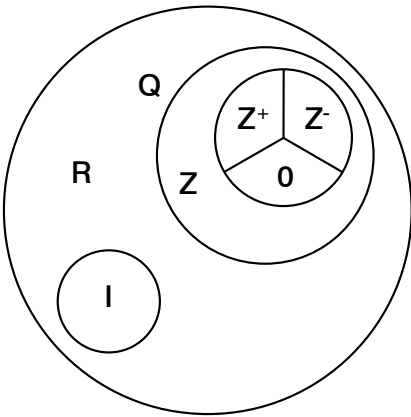
- 3 es un número entero y racional ya que puede escribirse como una fracción:  $\frac{1}{3}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4}$
- el número  $\frac{2}{5}$  es un racional, pero sin embargo no es un número entero.

Sin embargo existen números reales que no pueden ser expresados como cociente de dos números enteros:

- $\sqrt{5}$
- $\sqrt{7}$
- $\pi$  (número pi)
- $e$  (número de Euler)

Números irracionales: El conjunto de números irracionales I está formado por los números que no pueden ser expresados como una fracción de enteros, donde el denominador es distinto de cero y donde esta fracción es irreducible

Ahora que ya se han descripto los conjuntos numéricos puede verse como todos juntos forman el gran conjunto de Números Reales simbolizado R:



Ahora ya es posible introducir las operaciones básicas aritméticas a partir de *leyes aritméticas*:

|       | Suma                                                                                                 | Producto                                    |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| Ley 1 | $a + b = b + c$                                                                                      | $a \cdot b = b \cdot a$                     |
| Ley 2 | $a + (b+c) = (a+b) + c$                                                                              | $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ |
| Ley 3 | $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$                                                            |                                             |
| Ley 4 | $a + 0 = a$ (con $a$ en $Z$ )                                                                        | $1 \cdot a = a$ (con $a$ en $Z$ )           |
| Ley 5 | Para todo número entero $a$ existe otro entero $-a$ , llamado opuesto de $a$ tal que: $a + (-a) = 0$ |                                             |

Ahora, en medicina es muy común oír expresiones como:

*De un grupo de 50 personas vacunadas contra la gripe A manifestaron sólo el 22% presentó síntomas relacionados con la misma.*

Pero, ¿cuántas personas son el 22%?

Puede decir que el símbolo % (porcentaje) es una fracción que responde a cuantas personas presentan una determinada característica sobre un total de 100.

Si recuerda la regla de tres simple y considera que el 100% corresponde a las 50 personas vacunadas, el 22% de las mismas será igual a:

100% \_\_\_\_\_ 50 personas

$$22\% \quad \text{_____} \quad x = \frac{22\%}{100\%} \times 50 = 0.22 \times 50 \text{ personas}$$

$$x = 11 \text{ personas}$$

Al analizar detenidamente la respuesta anterior observa que para calcular cuánto representa cierto porcentaje de un total, solo es necesario multiplicar la cantidad total por el porcentaje sin necesidad de hacer la regla de tres.

Como en el caso anterior para saber cuántas personas correspondían al 22% de 50, solo debe multiplicar  $0,22 \times 50$ .

Otra situación común en medicina es:

*Para evaluar el crecimiento de un niño se mide su altura con un tallímetro que posee una regla graduada de 0 a 2 metros*

Aquí se utilizan los conceptos metro, centímetro y milímetro.

## 1.2. Sistema internacional de unidades

Estas "unidades" corresponden a lo que se conoce como *sistema internacional* que define siete unidades básicas de medida, que pueden derivar en otras unidades ampliamente utilizadas en las ciencias. En Argentina por ley se utiliza el Sistema Métrico Legal Argentino (SIMELA), que está basado en el Sistema Internacional.

A continuación se detallan las unidades básicas y derivadas que se utilizarán en este libro.

| Magnitud o fenómeno a medir    | Nombre    | Unidad SIMELA |
|--------------------------------|-----------|---------------|
| Longitud                       | metro     | m             |
| Masa                           | kilogramo | kg            |
| Tiempo                         | segundo   | s             |
| Intensidad Corriente Eléctrica | Ampere    | A             |
| Temperatura Termodinámica      | Kelvin    | K             |
| Cantidad de Materia            | mol       | mol           |
| Intensidad Luminosa            | candela   | cd            |

**Unidades derivadas de importancia para este libro**

| Magnitud                 | Nombre  | Símbolo     | Expresión                                                         |
|--------------------------|---------|-------------|-------------------------------------------------------------------|
| Fuerza                   | Newton  | N           | $m \cdot kg \cdot s^{-2}$                                         |
| Presión                  | Pascal  | Pa          | $N \cdot m^{-2}$<br>o<br>$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$           |
| Energía                  | Joule   | J           | $N \cdot m$<br>o<br>$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$                   |
| Potencia                 | Watt    | W           | $J \cdot s^{-1}$<br>o<br>$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$              |
| Cantidad de electricidad | Coulomb | C           | $A \cdot s$                                                       |
| Potencial eléctrico      | Volt    | V           | $W \cdot A^{-1}$<br>o<br>$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$ |
| Resistencia eléctrica    | Ohm     | $\Omega$    | $V \cdot A^{-1}$<br>o<br>$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$ |
| Temperatura              | Celsius | $^{\circ}C$ |                                                                   |

Si analiza el tallímetro puede observar que la escala mayor es la de metro, luego la escala inferior es la del centi-metro y la escala aún menor está representada por la del mili-metro. El término centímetro es una palabra compuesta por un prefijo *centi* y una raíz *metro*, al igual que la palabra mili-metro.

Estos prefijos están definidos por el SIMELA:

| Prefijo | Número            | Factor              | Símbolo |
|---------|-------------------|---------------------|---------|
| femto   | 0,000000000000001 | $1 \times 10^{-15}$ | f       |
| pico    | 0,000000000001    | $1 \times 10^{-12}$ | p       |
| nano    | 0,000000001       | $1 \times 10^{-9}$  | n       |
| micro   | 0,000001          | $1 \times 10^{-6}$  | $\mu$   |

[cont. pág. sgte]

|       |                  |                    |    |                |
|-------|------------------|--------------------|----|----------------|
| Mili  | 0,001            | $1 \times 10^{-3}$ | m  | [continuación] |
| centi | 0,01             | $1 \times 10^{-2}$ | c  |                |
| deci  | 0,1              | $1 \times 10^{-1}$ | d  |                |
|       | 1                | 1                  |    |                |
| deca  | 10               | $1 \times 10^1$    | da |                |
| hecto | 100              | $1 \times 10^2$    | h  |                |
| kilo  | 1000             | $1 \times 10^3$    | k  |                |
| mega  | 1000000          | $1 \times 10^6$    | M  |                |
| giga  | 1000000000       | $1 \times 10^9$    | G  |                |
| tera  | 1000000000000    | $1 \times 10^{12}$ | T  |                |
| peta  | 1000000000000000 | $1 \times 10^{15}$ | P  |                |

Para poder comprender correctamente la tabla, es necesario explicar dos operaciones como son la potencia y su inversa, la radicación.

Al analizar la definición que se da del prefijo kilo, se observa que se informa al factor de la forma  $10^3$ . A continuación se interpreta esta notación:

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

Se lee como la “base” elevado al “exponente”, en este caso “10 elevado a la 3”.

**1.3. Potencia. Radicación**

Potencia: La potencia hace referencia a la multiplicación del mismo factor una cantidad determinada de veces.

En forma general:

*a* elevado a la *n* se escribe como  $a^n = \underbrace{a \times a \times a \dots \times a}_{n \text{ veces}}$

En general si *m* y *n* son cualquier números naturales y *a* es cualquier número, se pueden definir nuevas leyes aritméticas:

|       | Potencia                   | Ejemplo                                       |
|-------|----------------------------|-----------------------------------------------|
| Ley 1 | $a^0 = 1$                  |                                               |
| Ley 2 | $a^1 = a$                  |                                               |
| Ley 3 | $a^m \times a^n = a^{m+n}$ | $3^2 \times 3^3 = 3^5 = 9 \times 27 = 243$    |
| Ley 4 | $a^m \times b^m = (ab)^m$  | $2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3 = 216$ |
| Ley 5 | $(a^m)^n = a^{mn}$         | $(3^2)^3 = 3^6 = 9^3 = 729$                   |
| Ley 6 | $a^m / a^n = a^{m-n}$      |                                               |

Si se calcula el resultado de la potencia:  $5^2 = 25$ .

se tiene la base (el número 5) elevado a la potencia (número 2) y se obtiene el resultado (25).

Ahora si lo que se busca es encontrar un número tal que elevado al exponente 2 de como resultado 25,  $x^2 = 25$

la operación que se necesita es la inversa de la potencia, a ella se le denomina *radicación*, y se expresa de la siguiente manera:

$$x^2 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{25} = 5$$

Si,  $b^m = a \Rightarrow \sqrt[m]{a} = b$  donde  $m$  se llama índice,  $a$  se denomina radicando y  $b$  es la raíz enésima.

$$b^m = a \Leftrightarrow \sqrt[m]{a} = b \text{ donde el símbolo } (\Leftrightarrow) \text{ se lee "si y solo si"}$$

Otra forma de expresar a la radicación es como una potencia solamente que ahora en vez de simbolizarse la raíz se eleva al recíproco del índice.

$$\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$$

Ejemplo:

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8, \text{ entonces } \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$$

### Algunas propiedades de la radicación:

|       |                                                                       |                                                                                                                    |                                                                                |
|-------|-----------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| Ley 1 | Raíz de raíz                                                          | $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$                                                                             | $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64}$<br>$= \sqrt[6]{64} = \pm 2$       |
| Ley 2 | Simplificación de exponentes e índices (por ser operaciones inversas) | $(\sqrt[m]{a})^n = a^{\frac{1}{m} \cdot n}$                                                                        | $(\sqrt[3]{8})^6 = 8^{\frac{1}{3} \cdot 6}$<br>$8^2 = 64$                      |
| Ley3  | Propiedad distributiva respecto del producto y del cociente           | $\sqrt[m]{a \cdot b} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$<br>$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ | $\sqrt{25 \cdot 4} = \pm \sqrt{25} \cdot \sqrt{4}$<br>$\pm 5 \cdot 2 = \pm 10$ |

En las ciencias es muy común trabajar con expresiones numéricas de diversas magnitudes u ordenes, desde los más pequeños como ser la distancia de separación de la cadena de las doble hélices del ADN, hasta valores tan vastos como la cantidad de material que corresponde al número de Avogadro.

Ya con los conceptos de potencia y radicación es posible ahora comprender el significado del factor de conversión que aparece en la tabla de los prefijos de SIMELA y que es una forma práctica de informar tanto grandes como pequeñas cantidades

Notación científica: es un método que busca simplificar la expresión del número lo más posible un número ya sea grande como pequeño para expresarlo en forma de un número real multiplicado por una potencia de base 10 y elevado al exponente necesario.

Si analiza ahora la altura de un niño de *90 centímetros*, se observa que el prefijo es *centi* y la unidad es el *metro*, el número es *90* según la tabla el factor asociado es  $10^{-2}$ , ahora se expresa en forma de notación científica  $90 \times 10^{-2}$  esta notación representa el siguiente número *0,90m*.

A continuación se presentan algunos ejemplos:

| Expresión Común | Prefijo | Unidad | Número real | Factor    | Notación científica   | Valor numérico |
|-----------------|---------|--------|-------------|-----------|-----------------------|----------------|
| 10 centímetros  | centi   | metro  | 10          | $10^{-2}$ | $10 \times 10^{-2} m$ | 0,01 m         |
| 2 kilogramos    | kilo    | gramo  | 2           | $10^3$    | $2 \times 10^3 g$     | 2000 g         |
| 50 microlitros  | micro   | litros | 50          | $10^{-6}$ | $50 \times 10^{-6} l$ | 0,00005 l      |

A simple vista se observa las bondades de esta forma de representación en la cual mediante la utilización de un factor de conversión basado en la potencia de base 10, es posible representar números muy pequeños hasta números muy grandes de una forma fácil de operar y entender.

Si retomamos los ejemplos de la medicina:

*Los glóbulos rojos cumplen un papel esencial en la vida de todos los seres vivos. Estos poseen un diámetro medio de  $6 \mu m$  (micrometros). Si una mujer adulta en el informe de laboratorio posee de glóbulos rojos por  $\mu L$  de sangre. ¿Puede decir cuantos glóbulos rojos posee teniendo en cuenta que el volumen total de sangre es aproximadamente de 5 litros?*

El enunciado del problema le esta diciendo que por cada  $\mu l$  de sangre hay una cantidad de  $5 \times 10^6$  glóbulos rojos (GR), a esta cantidad por unidad de volumen se la conoce como concentración, en unidades posteriores trabajará con ella.

Normalmente trataría de resolver este problema mediante la utilización de la regla de tres simple:

$$\begin{array}{rcl} 5 \times 10^6 \text{ GR} & \text{_____} & 1 \mu l \\ ? & \text{_____} & 5l \end{array}$$

Aquí encuentra el primer escollo, para poder resolver este problema se deben transformar las magnitudes expresadas en litros a microlitros. Aplicando las reglas de la potencia:

$$\begin{aligned}\frac{5 \times 10^6 \text{ GR}}{1 \mu\text{l}} * \frac{1 \mu\text{l}}{10^{-6} \text{l}} * 5 \text{l} &= 5 \times 10^6 * 5 \times (10^{-6})^{-1} \\ &= (5 \times 5) * (10^6 \times 10^6) \\ &= 25 \times (10^{6+6}) \\ &= 25 \times 10^{12} \text{ GR}\end{aligned}$$

Ahora que ya comprende la notación científica, analice los siguientes ejercicios:

- Convertir  $5 \times 10^6$  a km

*Solución:* se escribe la expresión en forma de notación científica

$$5 \times 10^6 \text{ m} = 5 \times 10^3 \text{ km} = 5000 \text{ km}$$

- Convertir 5,34 km a metros

se escribe la expresión en forma de notación científica

$$5,34 \text{ km} = 5,34 \times 10^3 \text{ m} = 5340 \text{ m}$$

- Convertir  $10 \mu\text{l}$  (microlitro) a litro

*Solución:* se continua utilizando los mismos principios

$$10 \mu\text{l} = 10 \times 10^{-6} \text{ l} = 0,00001 \text{ l}$$

- Diga si estas dos magnitudes son iguales  $100 \times 10^{-6} \text{ cm}$  y  $1 \mu\text{m}$

*Solución:* primero se debe convertir a metros para luego si comparar con  $1 \mu\text{m}$

$$100 \times 10^{-6} \text{ cm} = 100 \times 10^{-6} (10^{-2} \text{ m}) = 100 \times 10^{-8} \text{ m}$$

a su vez

$$100 = 1 \times 10^2 \Rightarrow 1 \times 10^{2+(-8)} = 10 \times 10^{-6} \text{ m}$$

y como

$$1 \mu\text{m} = 1 \times 10^{-6} \text{ m}$$

al escribir  $100 \times 10^{-6} \text{ cm}$  y  $1 \mu\text{m}$  se está refiriendo a la misma magnitud

Este último ejemplo, muy importante, porque muchas veces encontrará diferentes maneras de expresar un mismo valor, sobre todo en medicina al expresar valores de concentraciones en sangre o dosis farmacológicas.

Hasta ahora usted solo sabe resolver una potencia como por ejemplo  $5^2 = 25$  y su inversa la radicación  $\sqrt{25} = 5$ .

Que sucedería si usted quisiera saber cuál es el exponente al cual está elevada una base que da como resultado un número determinado, o sea:

$$5^x = 125$$

Aquí es necesario saber cual es el valor del exponente al cual esta elevado 5 para que de como resultado 125, a esta operación se la denomina *logaritmo*.

De vuelta al ejemplo, para conocer el valor de x, se aplica el logaritmo de la siguiente manera:

$$5^x = 125 \Rightarrow \log_5 125 = x = 3$$

En forma general:

$$\log_a b = n \Leftrightarrow a^n = b \text{ (a y b reales positivos y } a \neq 1)$$

la operación se lee  $n$  es el logaritmo de base  $a$  de  $b$ , si y solo si  $a$  elevado al exponente  $n$  es igual a  $b$ .

Cuando no se explicita la base del logaritmo se entiende que se utiliza una base 10.

Una clase especial de logaritmo es cuando la base es el número irracional  $e$  y se escribe como  $\ln b = \log_e b$ , donde  $\ln$  significa logaritmo natural o neperiano.

*Ejemplos:*

- Expresar la siguiente afirmación en forma logarítmica

$$2^4 = 16, \text{ lo cual es equivalente a } \log_2 16 = 4$$

$$6^{-2} = \frac{1}{36}, \text{ lo cual es equivalente a } \log_6 \frac{1}{36} = -2$$

- Aplicar la definición de logaritmo para resolver una expresión

$$\log_4 = \left( \frac{1}{36} \right) = -2, \text{ debido a que } 4^{-2} = \left( \frac{1}{16} \right)$$

La definición de logaritmo establece que ambas expresiones, la logarítmica y la exponencial son equivalentes. En la siguiente tabla se muestran varios ejemplos de esta equivalencia.

| Forma Logarítmica    | Forma Logarítmica                                            |
|----------------------|--------------------------------------------------------------|
| $\log_b x = y$       | $by = x$                                                     |
| $\log_x 64 = 3$      | $4^3 = 64$                                                   |
| $\log_{64} 16 = 2/3$ | $64^{2/3} = 64^{2 \cdot \frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64^2} = 16$  |
| $\log_a 1 = 0$       | $9^0 = 1$                                                    |
| $\log_{1/2} 8 = -3$  | $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{2^{-3}} = 2^3 = 8$ |

|       | Logaritmo                            | Forma Logarítmica                                      |
|-------|--------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| Ley 1 | $\log_a (mp) = \log_a m + \log_a p$  | $\log_5 25 = \log_5 (5 \cdot 5) = \log_5 5 + \log_5 5$ |
| Ley 2 | $\log_a (m/p) = \log_a m - \log_a p$ | $\ln \left(\frac{5}{3}\right) = \ln 5 - \ln 3$         |
| Ley 3 | $\log_a (mr) = r \log_a m$           | $\log 4^3 = 3 \log 4$                                  |
| Ley 4 | $\log_a ar = r$                      | $\log 10^5 = 5$                                        |

## 1.4. Expresiones algebraicas

### 1.4.1. La notación simbólica

Aunque no le resulte muy agradable a esta altura es necesario que comience a trabajar con la combinación de números y letras, es decir expresiones como:

$$3xy$$

$$\pi r^2$$

$$2x + 5y = 18$$

Primero precisemos algunos temas:

---

Expresión algebraica: es la combinación de números y letras afectadas por las operaciones de suma, resta, producto, cociente potencia y raíz.

---

$$2x + 3y; \frac{x}{6} + \frac{x}{13} + \frac{x}{2} + 5; x^2 + 6x - 16$$

En general cuando una o más cantidades numéricas son desconocidas o sea incógnitas se representan por letras.

---

Ecuaciones algebraicas: Son las expresiones algebraicas que además incluyen el signo igual “=”.

---

$$3xy = \frac{2}{5} \frac{13}{3} x - \frac{6}{7} = 4$$

$$\frac{1}{3}x - y = 6 \quad 3x^2 + x - 1 = 4$$

Ahora resuelva utilizando expresiones algebraicas o ecuaciones según corresponda para simbolizar estos enunciados:

1. El doble del peso de estos dos niños es el peso de Juan.
2. La diferencia de dos números dividido tres.
3. El triple de un número más su mitad.
4. El peso de Pedro es 5 veces mayor que el de Jaime.

Siga resolviendo con las definiciones anteriores y asocie cada enunciado de la columna izquierda con uno de la derecha.

- |                                                                              |                     |
|------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| a) El doble de la dosis de esta droga tiene efectos colaterales indeseables. | 1. $x + 15 = 2y$    |
| b) Dentro de 15 años, la edad de esta mamá será el doble de la de su hijo.   | 2. $x^2 + y^2 = 13$ |
| c) El cuadrado de la suma de dos números es igual a 81.                      | 3. $2x$             |
| d) La suma de los cuadrados de dos números es 13                             | 4. $(x + y)^2 = 81$ |

Para continuar se verá algo sobre ecuaciones y su resolución.

---

Ecuación: igualdad en la que aparecen vinculados números y letras y que sólo se satisface para ciertos valores asignados a esas letras denominadas incógnitas.

---

Para identificar cuántas incógnitas tiene cada una de las ecuaciones:

$$z + 3 = 11$$

$$7p^2 + 10 = 3$$

$$a^2 + b + 3 = -c$$

A las letras de la ecuación se les pueden asignar valores.

---

Los valores que deben tomar las incógnitas para satisfacer la igualdad, se llaman soluciones o *raíces* de la ecuación.

---

Resolver una ecuación significa encontrar todas sus soluciones y puede involucrar varios pasos:

**a)**  $x - 16 = 48$

*sumando 16 a cada miembro de la ecuación*

$$x - 16 + 16 = 48 + 16$$

$$x - 0 = 48 + 16$$

$x = 64$  la ecuación tiene una sola solución y esta es 64

**b)**  $y - (-8) = 6$

*por definición de la resta*

$$y + 8 = 6$$

*restamos 8 a ambos miembros de la ecuación*

$$y + 8 - 8 = 6 - 8$$

$$y + 0 = 6 - 8$$

$y = -2$  la ecuación tiene una solución

**c)**  $7 - 2x = (-13) (-3) + 2$

$$7 - 2x = 39 + 2$$

$$7 - 2x = 41$$

$$-2x = 41 - 7$$

*dividimos ambos miembros por -2*

$$-\frac{2}{-2}x = \frac{34}{-2}$$

$x = -17$  g la única solución de la ecuación es -17

**d)**  $4 + \frac{x}{-2} = -1$

$$\frac{x}{-2} = -1 - 4$$

$$\frac{x}{-2} = -5$$

*se multiplican ambos miembros por -2*

$$-2 * \frac{x}{-2} = -5(-2)$$

$$x = 10$$

Si analiza los ejemplos anteriores puede ver que:

- en el inciso a) el 16 que está restando pasa al otro miembro sumando
- en el inciso b) el 8 que está sumando pasa al otro miembro restando

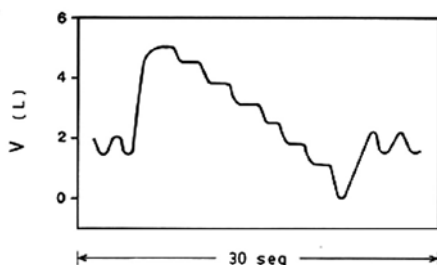
- en el inciso c) el -2 que está multiplicando, pasa al otro miembro dividiendo
- en el inciso d) el -2 que está dividiendo, pasa al otro miembro multiplicando

El procedimiento es el resultado de aplicar correctamente las definiciones y leyes dadas. No existe la operación o ley pasaje de término de un miembro a otro.

### 1.5. Funciones: lineal, cuadrática y exponencial

En la medicina como en otras ciencias es muy común encontrar fenómenos que necesitan ser cuantificados, éstos pueden estar caracterizados por magnitudes que al medirlas darán una idea, con mayor o menor exactitud, de la dependencia entre ellas.

Como ejemplo vea el siguiente gráfico:



Puede observar como varía el volumen pulmonar de acuerdo a la inspiración y expiración a lo largo del tiempo.

Otros ejemplos podrían ser como la reacción de un organismo frente a un fármaco depende de la dosis del medicamento o como el crecimiento de una población depende del número de individuos y de depredadores.

Con frecuencia tales relaciones pueden representarse mediante funciones.

El gráfico de una función da una visualización rápida y general de los procesos que están ocurriendo, como en el gráfico del volumen pulmonar en función del tiempo.

Aquí se tienen dos magnitudes que están variando, el tiempo y el volumen pulmonar pero una sola de ellas depende de la otra.

En este caso existe una función que explica como varía el volumen pulmonar en función del tiempo, se dice entonces que el tiempo es la variable independiente y la función de volumen pulmonar la variable dependiente.

En términos generales:

---

Una función relaciona los elementos de dos conjuntos mediante una determinada regla de asociación.

---

Una definición formal sería:

---

Una variable  $y$  se dice que es función de otra variable  $x$ , cuando a cada valor de  $x$  le corresponde uno y solo un valor de  $y$ .

---

El conjunto de valores que puede tomar la variable  $x$ , en nuestro caso el tiempo se llama *dominio de la función*. El conjunto de valores que toma la función se llama conjunto imagen o simplemente *imagen* de la función y en el ejemplo sería el volumen pulmonar en litros.

Para simbolizar una función se escribe  $y = f(x)$ . Debido a que  $x$  determina el valor de  $y$  (por definición de función a cada valor de  $x$  le corresponde uno de  $y$ ) se la llama *variable independiente* e  $y$  recibe el nombre de *variable dependiente*.

La expresión  $y = f(x)$  se lee "y igual a f de x".

Generalmente se utiliza la nomenclatura  $f(x)$  en lugar de  $y$  para representar una función. Por ejemplo:

*la expresión  $f(x) = 3x - 2$  simboliza una función en la cual para cada valor de  $x$  en el dominio existe un valor  $3x-2$  de imagen*

*para un valor del dominio  $x=3$  la correspondiente imagen se expresa  $f(3)$  y se determina  $f(3) = 3(3)-2 = 7$*

Nuevamente, es de hacer notar que la definición de función establece que para cada elemento del dominio le corresponda un solo elemento de la imagen. Este requisito en la definición evita ambigüedades al momento de determinar el valor de  $f$  dado un determinado  $x$ .

Por ejemplo:

El dominio constituido por los nombres de todas la personas de una determinada ciudad y la imagen formada por todos los números telefónicos registrados en esa misma ciudad.

En este ejemplo  $y$  no es función de  $x$  debido a que puede existir una persona que tenga más de un número telefónico registrado a su nombre, en efecto, si  $x$  es una persona con más de un número telefónico,  $f(x)$  no estaría bien definida ya que no podríamos determinar que el número de teléfono represente a esa persona ( $x$ ).

Normalmente cuando el dominio y la imagen de una función no están especificados se asume que el mismo comprende al conjunto de los números reales a excepción de aquellos valores del dominio en donde  $f(x)$  no existe.

---

*Funciones escalares* o de Variable Real: aquellas en las cuales el dominio y el conjunto imagen están incluidos en el conjunto de los números reales.

---

Ejemplos:

- $y = 2x + 3$  es una función escalar ya que su dominio es el conjunto de los números reales ( $\mathbb{R}$ ).
- $y = \sqrt{x}$  el dominio de esta función debe ser un número real y para que esto sea posible  $x$  debe ser mayor o igual que 0 ( $x \geq 0$ ). Por lo tanto el dominio de esta función son todos los reales positivos incluido el cero.

Fundamentalmente existen tres formas de expresar una función: Por medio de una tabla de valores, por medio de una ecuación y por medio de una gráfica.

Las funciones pueden graficarse en un sistema de ejes coordenados ( $x, y$ ), donde los valores del dominio de la función se representan sobre el eje  $x$  y los valores de la imagen sobre el eje  $y$ .

Una función de la forma  $y = c$ , donde  $c$  es una constante (un número) recibe el nombre de función constante y su gráfica es siempre una línea recta paralela al eje  $x$ .

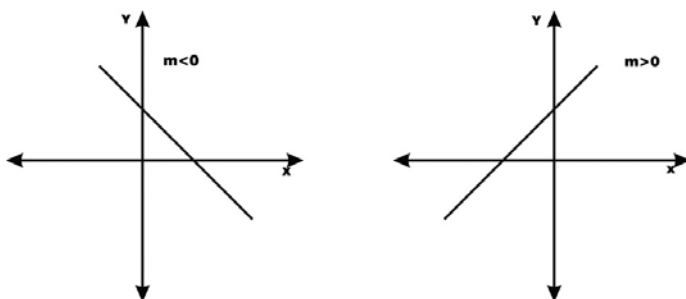
Por otro lado, una función de la forma  $y = mx + b$ , donde  $m$  y  $b$  son constantes, se llama función lineal y su gráfica es una línea recta que corta a eje  $y$  en  $b$  y su pendiente es  $m$  (que significa que por cada unidad desplazamiento horizontal existe  $m$  unidades de desplazamiento vertical).

#### 1.5.1. Función lineal o función polinómica de primer grado

La expresión general de una función lineal es igual a  $y = mx + b$ , con  $m$  y  $b$  constantes,  $m \neq 0$ .

Note que el dominio de  $f(x)$  es el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$ .

La gráfica de  $f$  es una recta oblicua, cuya inclinación respecto al eje  $x$ , depende del signo de  $m$ , ilustramos esto en las siguientes figuras.



La recta o línea recta, se extiende en una misma dirección, existe en una sola dimensión y contiene infinitos puntos; está compuesta de infinitos segmentos (el fragmento de línea más corto que une dos puntos).

También se describe como la sucesión continua e indefinida de puntos en una sola dimensión, o sea, no posee principio ni fin.

Las líneas rectas pueden ser expresadas mediante una ecuación del tipo

$$y = m x + b, \text{ donde } x, y \text{ son variables en un plano.}$$

En dicha expresión  $m$  es denominada la "pendiente de la recta" y está relacionada con la inclinación que toma la recta respecto a un par de ejes que definen el plano. Mientras que  $b$  es el denominado "término independiente" u "ordenada al origen" y es el valor del punto en el cual la recta corta al eje vertical en el plano.

Podemos representar una recta en un plano mediante una ecuación, y determinar los valores que cumplan determinadas condiciones, por ejemplo, las de un problema de geometría.

### **Pendiente y ordenada al origen**

En una recta, la pendiente  $m$  es siempre constante pudiendo calcularse mediante la ecuación:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Se puede obtener la ecuación de la recta a partir de la fórmula de la pendiente (ecuación punto-pendiente):

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

Si analiza el ejemplo:

*Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto A (2 , - 4) y que tiene una pendiente de  $- 1/3$ .*

Al sustituir los datos en la ecuación, resulta lo siguiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-4) = -1/3(x - 2)$$

$$3(y + 4) = -1(x - 2)$$

$$3y + 12 = -x + 2$$

$$x + 3y + 12 = 2$$

$$x + 3y + 10 = 0$$

### **Forma simplificada de la ecuación de la recta**

Si se conoce la pendiente  $m$ , y el punto donde la recta corta al eje de ordenadas es  $(0, b)$ , podemos deducir, partiendo de la ecuación general de la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - b = m(y - 0)$$

$$y - b = mx$$

$$y = mx + b$$

Esta es la segunda forma de la ecuación de la recta y se utiliza cuando se conoce la pendiente  $m$  y la ordenada al origen, que llamaremos  $b$ .

También se puede utilizar esta ecuación para conocer la pendiente y la ordenada al origen:

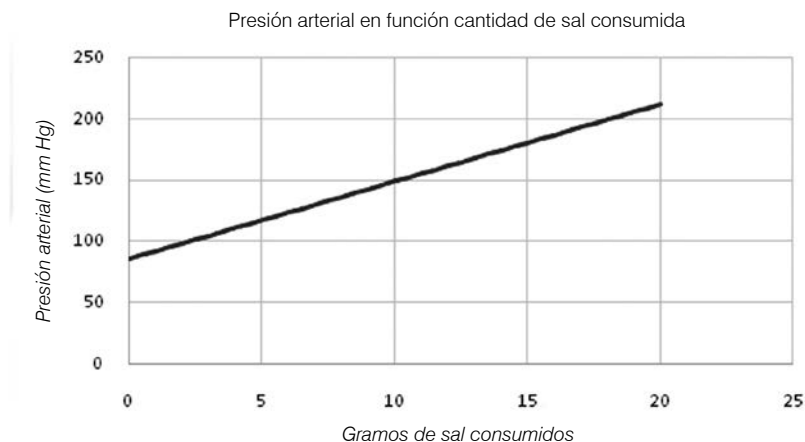
*Una elevada ingesta de sal podría llevar a un aumento en la presión arterial.*

*Por esta razón, el médico cardiólogo, Horacio Tool, convocó a su equipo de investigación para realizar un estudio.*

*Trabajaron con un grupo grande de voluntarios. Les administraron distintas dosis de sal en su dieta y le midieron su presión arterial un tiempo después. Finalizado el estudio, los investigadores concluyeron que en ese grupo de personas, la presión arterial y el consumo de sal están relacionados linealmente. Luego de realizar algunos cálculos sencillos se obtuvo la ecuación de la recta  $y = 6,3x + 86$*

donde  $y$ : presión arterial (mm de Hg) y  $x$ : gramos de sal

Representada por la gráfica de la función:

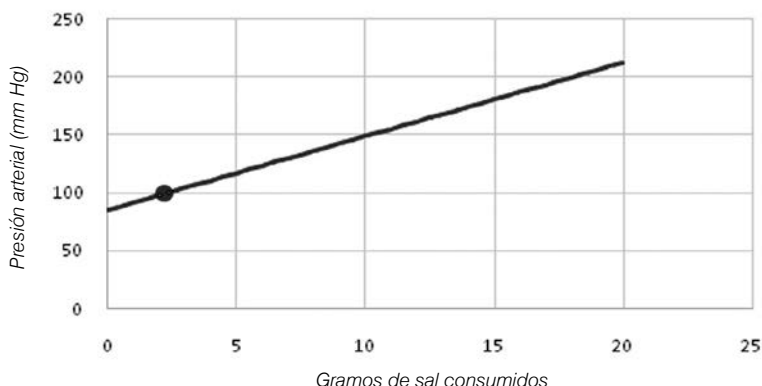


**a)** Si el consumo de sal es 2,2 gramos ¿Cuál es la presión arterial?

Aquí uno puede optar por responder la pregunta de forma analítica o sea en base a la función, o como ocurre muchas veces en donde no es posible conocer perfec-

tamente el valor de la función utilizar la gráfica resultante del fenómeno medido como guía para encontrar el valor faltante, recuerde que una función relaciona dos variables en este caso  $x$  (gramos de sal) e  $y$  (presión arterial) y para cada punto de la recta existe un par de puntos  $(x, y)$ ; así que si se desea saber la presión arterial que correspondería a 2,2 gramos de sal:

Presión arterial en función cantidad de sal consumida



Puede observarse que el valor que le correspondería es aproximadamente 100 mm Hg.

**b)** Si el consumo de sal es 3,6 gramos ¿Cuál es la presión arterial?

Resuelva este inciso analíticamente, para ello debe utilizar la función que describe el fenómeno y reemplazar para calcular el valor

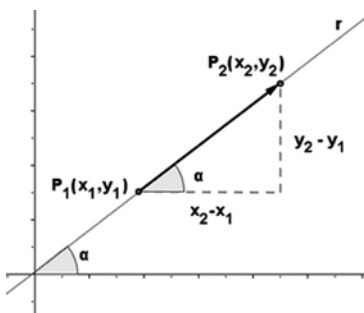
$$y = 6,3(3.6) + 86 = 125.69 \text{ mmHg}$$

**c)** Si la presión arterial es 112 mmHg, ¿Cuál sería el consumo de sal?

Esta vez el dato es el resultado de la función, lo que debe hacer es despejar el valor de  $x$

$$y = 6,3x + 86 \Rightarrow y - 86 = 6,3x \Rightarrow x = \frac{y - 86}{6,3} \rightarrow x = \frac{112 - 86}{6,3} = 4.13g \text{ sal}$$

Ahora, observe el siguiente gráfico:



Cuando se tienen dos puntos de una recta  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$ , la pendiente, *que es siempre constante*, queda determinada por el cociente entre la diferencia de las ordenadas de esos dos puntos y la diferencia de las abscisas de los mismos puntos, según:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por lo tanto, a partir de la *pendiente*, también se puede obtener la ecuación de la recta, con la fórmula:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Esta forma de obtener la ecuación de una recta se suele utilizar cuando se conocen su pendiente y las coordenadas de uno solo de sus puntos.

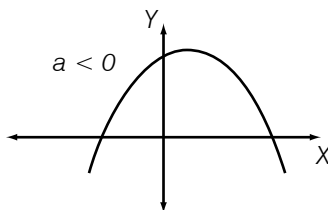
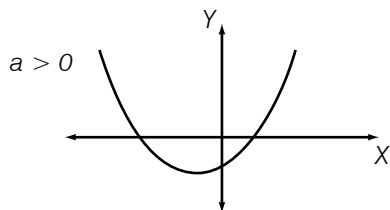
### 1.5.2. Función cuadrática

La función cuadrática tiene muchas aplicaciones, no sólo en matemática sino también en ciencias de la salud.

La forma general de una función cuadrática es

$$y_{(x)} = ax^2 + bx + c, \text{ con } a \text{ y } b \text{ constantes y } a \neq 0.$$

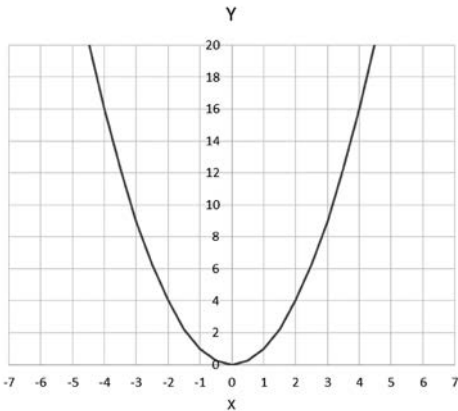
El dominio de la función es el conjunto de los números reales y su gráfica es una parábola, cuya concavidad, es decir, si abre hacia arriba o hacia abajo depende del signo de  $a$ .



El caso más sencillo de la función es  $y = x^2$ , es decir cuando  $b = c = 0$ . Para construir la gráfica de la función podemos realizar una tabla de valores

|                    |    |    |    |   |   |   |   |
|--------------------|----|----|----|---|---|---|---|
| x                  | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y = x <sup>2</sup> | 3  | 4  | 1  | 0 | 1 | 4 | 9 |

Si graficamos los puntos obtenidos en un sistema coordenado obtenemos:

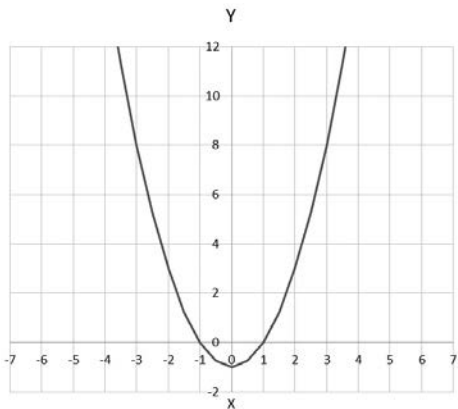


La coordenada del vértice es el punto (0,0) y como la parábola abre hacia arriba el punto (0,0) es un mínimo

Observe ahora que ocurre al restar una constante al término cuadrático  $y = x^2 - 1$

|                        |    |    |    |    |   |   |   |
|------------------------|----|----|----|----|---|---|---|
| x                      | -3 | -2 | -1 | 0  | 1 | 2 | 3 |
| y = x <sup>2</sup> - 1 | 8  | 3  | 0  | -1 | 0 | 3 | 8 |

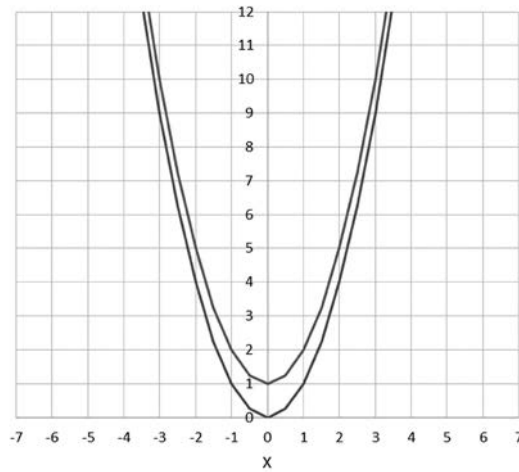
Al graficar los puntos de la tabla anterior se obtiene:



Se puede observar que al restar 1 al término cuadrático se produce un desplazamiento vertical de 1 unidad hacia abajo. En este caso la coordenada del vértice es el punto (0,-1)

De manera similar se produce un desplazamiento vertical al sumar una constante al término cuadrático.

$$y = x^2 + 1$$

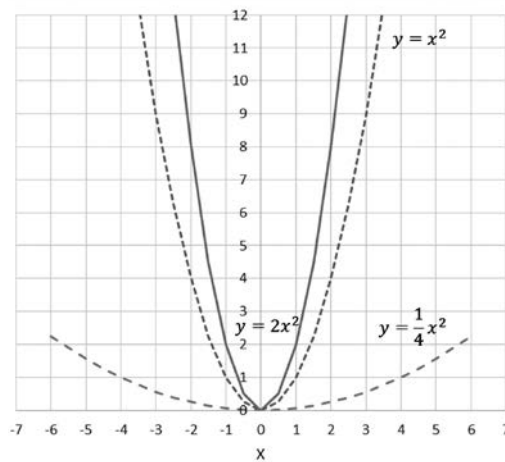


Grafique ahora:

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

$$y = 2x^2$$

$$y = x^2$$



Al observar la gráfica se puede concluir que el hecho de multiplicar al término cuadrático por una constante distinta de cero produce una modificación en la amplitud de la parábola.

Un ejemplo: El número de microorganismos en un refrigerador de alimentos está dado por la siguiente ecuación

$$N_{(T)} = 20T^2 - 20T + 120$$

donde T es la temperatura de los alimentos en grados centígrados

¿A que temperatura el número de microorganismos será mínimo?

Solución: A partir de la ecuación se observa que  $a > 0$  (20) esto significa que el vértice de la parábola presenta un mínimo. Esto indica que para poder responder la pregunta necesitamos hallar las coordenadas del vértice.

Para hallar la componente en x del vértice se puede utilizar la siguiente ecuación:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

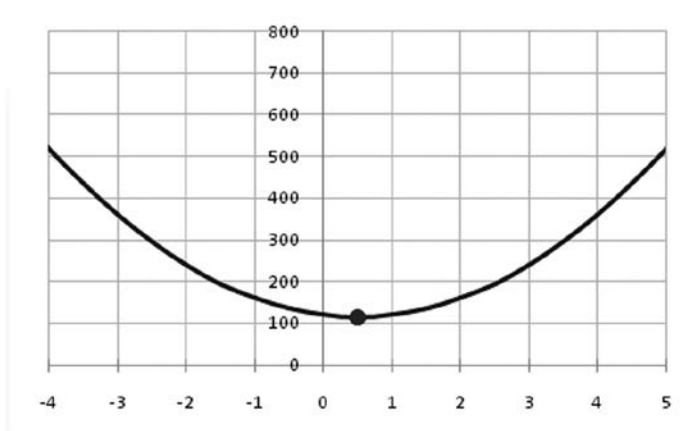
Debido a que nuestra función está en términos de T la ecuación sería:

$$T = -\frac{b}{2a}$$

Reemplazando con los datos del problema se obtiene:

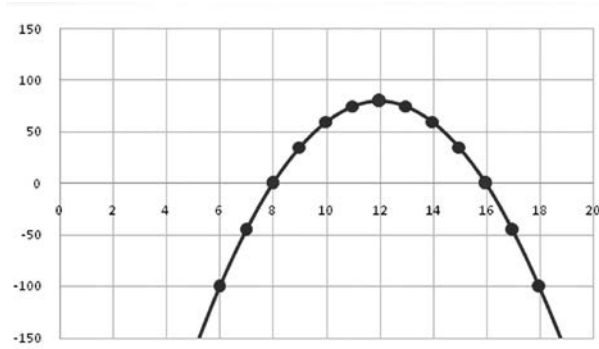
$$T = \frac{-(20)}{2(20)} = 0,5$$

Por lo tanto el valor de T para el vértice es 0,5. Como puede verse en la siguiente gráfica.



Si retoma la pregunta del problema, necesita averiguar la temperatura a la cual el número de microorganismos es mínimo y T es la temperatura, entonces este es el valor que está buscando.

En otras oportunidades puede ser necesario resolver la ecuación cuadrática  $ax^2 + bx + c = 0$ , es decir encontrar sus raíces cuando la función vale 0.



La función de la gráfica anterior es  $-5x^2 + 120x - 640 = 0$

Para poder resolverla es necesario aplicar la ecuación conocida como resolvente:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como puede observar dicha ecuación brinda dos soluciones que son los dos puntos donde la función al hacerse 0 intercepta al eje x.

Al resolver el ejemplo vemos que:

$$a = -5 \qquad b = 120 \qquad c = -640$$

Si sustituimos en la fórmula nos queda como

$$\frac{-120 \pm \sqrt{120^2 - 4(-5)(120)}}{2(-5)} = \frac{-120 \pm \sqrt{1600}}{-10} = \frac{-120 \pm 40}{-10}$$

Y al calcular la solución obtenemos los valores de x.

$$\text{Solución}_1 = 8$$

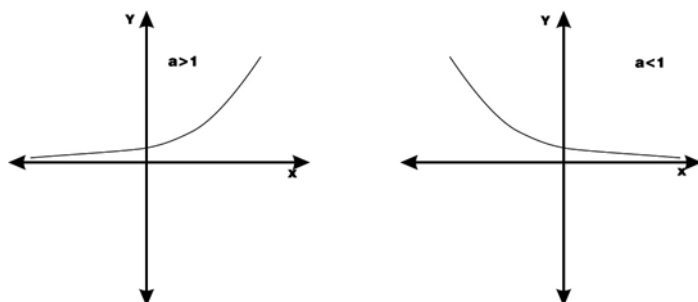
$$\text{Solución}_2 = 16$$

### 1.5.3. Función exponencial

Se estudiarán algunas características importantes de esta función definida como:

$$f(x) = a^x \text{ con } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

La gráfica de dicha función depende del valor de la base  $a$ :



Uno de los usos más importantes de la función exponencial es la que tiene como base al *número e* que se utiliza por ejemplo para el estudio del crecimiento de poblaciones.

Supongamos que  $N_0$  es el número inicial ( $t=0$ ) de individuos presentes en una población y  $k$  es una constante, el modelo está dado por:

$$N_{(t)} = N_0 e^{kt}$$

Representa el número de individuos que tendrá la población a un tiempo  $t$ .

Podemos observar que si  $k > 0$  la función  $N(t)$  es creciente y por lo tanto la población crece, Por el contrario si  $k < 0$  se tiene la situación inversa y el modelo es de decrecimiento.

Ejemplo:

Un cultivo bacteriano de una muestra de orina se desarrolla a razón de 5% cada hora. Si se supone que inicialmente la muestra contenía 10000 bacterias. Cual será el número de bacterias en la muestra luego de 24 hs de cultivo en las condiciones adecuadas.

Solución:

El modelo de crecimiento es el siguiente:

$$N_{(t)} = N_0 e^{kt}$$

Donde:

$N(t)$  = número de bacterias al tiempo  $t$

$N_0$  = número inicial de bacterias presentes en la muestra (10000)

$K$  = razón de crecimiento (0,05)

$t$  = tiempo transcurrido

Reemplazando

$$N_{(t)} = 10000 e^{0,05 \cdot 24}$$

$$N_{(t)} = 10000 e^{0,05 \cdot 24}$$

$$N_{(24)} = 33201$$

Entonces luego de 24 horas de cultivo el número de bacterias será de 33201.

Otro ejemplo:

Se desarrolló un modelo para la expansión de una epidemia

$$E_{(t)} = \frac{120}{1 + e^{-0,07t}}$$

Donde  $E_{(t)}$  representa la cantidad de personas que adquieren la enfermedad en función del tiempo  $t$  medido en días. ¿Cuál fue el número inicial de personas infectadas? ¿Cuántas personas habrán contraído la enfermedad una semana?

Solución:

Número inicial de personas infectadas:

$$E_{(t)} = \frac{120}{1 + e^{-0,07 \cdot 0}} = \frac{120}{1 + 1} = 60$$

Número de personas infectadas luego de una semana (7 días).

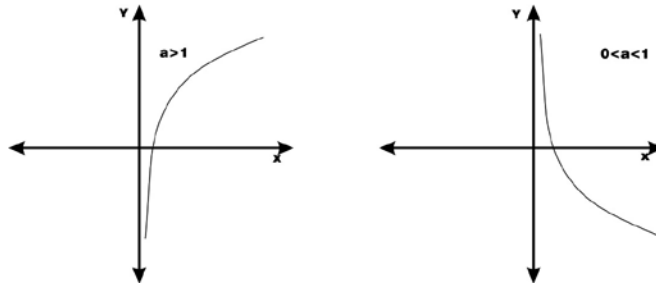
$$E_{(t)} = \frac{120}{1 + e^{-0,07 \cdot 7}} = \frac{120}{1 + e^{-0,49}} = \frac{120}{1 + 0,61} = 74$$

Pasada una semana 74 personas habrán contraído la enfermedad.

## 1.6. Función logarítmica

La función logarítmica es la inversa de la exponencial, entonces se verifica la siguiente propiedad.

$$\log_a a^x = x \quad a^{\log_a x} = x$$



Ejemplo:

Si tenemos en cuenta el cultivo de la muestra de orina del ejemplo anterior y tenemos en cuenta que el número de bacterias no debe superar las 15000, de lo contrario se deberá cambiar de tratamiento antibiótico. ¿De cuanto tiempo se dispone antes de cambiar de tratamiento?

Solución:

El modelo de crecimiento está dado por:

$$N_{(t)} = N_0 e^{kt}$$

Reemplazando:

$$15000 = 10000 e^{0,05 \cdot t}$$

$$\frac{15000}{10000} = e^{0,05 \cdot t}$$

$$\ln 1,5 = 0,05 t$$

$$\frac{0,4}{0,05} = t$$

$$t = 8$$

Se disponen de 8 horas antes de cambiar de tratamiento antibiótico.

### 1.7. Vectores

Se ha visto en este capítulo como trabajar con magnitudes y calcular las soluciones de funciones algebraicas o ecuaciones, a estas magnitudes se las denomina *escalares*, también existe una magnitud llamada *vectorial* que es muy importante en otras áreas de la ciencia donde es necesario explicitar un sentido, dirección, modulo y punto de aplicación de alguna magnitud.

En medicina es muy útil cuando es necesario representar por ejemplo el punto de aplicación de la fuerza ejercida por un musculo cuando actúa sobre una extremidad.

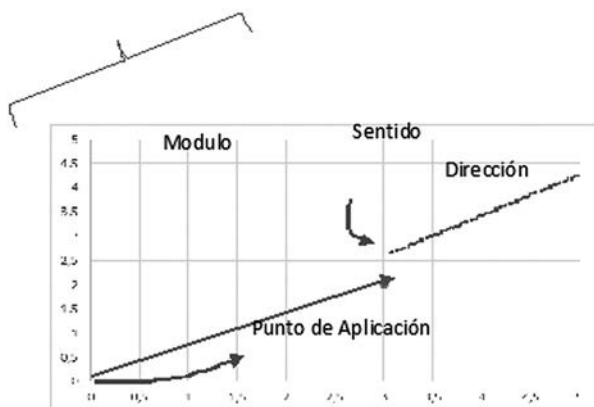
A continuación se da una definición de vector y operaciones básicas que luego serán retomada en la unidad de Física.

Un Vector está definido por cuatro propiedades:

- Punto de aplicación u origen del vector
- Dirección
- Sentido
- Módulo

A partir de un sistema cartesiano x,y si tomamos como origen del vector  $\vec{V}$  el punto (0;0) y se extiende hacia el punto (3;2).

Queda definido el vector  $\vec{V}$  como se observa en el siguiente gráfico.



La dirección del vector está dada por una recta donde están incluidos el origen como el punto (0,0) y el punto (3,2) y el sentido que toma el vector es hacia el punto (3,2) .

Para calcular la magnitud proporcional a ese vector es necesario calcular el módulo del vector:

$$|\vec{V}| = \sqrt{\vec{V}^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \approx 3,6$$

De esta forma está definido el vector  $\vec{V}$  con sus propiedades:

- Punto de aplicación: (0,0)
- Dirección: una recta que pasa por los puntos (0,0) y (3,2)
- Sentido: desde el punto (0,0) hacia (3,2)
- Módulo: es igual a 3,6.

## Bibliografía

**Aristegui, R.A.** *Físicoquímica*. Santillana. 2001.

**Atkins, Peter W.** *Química*. 3ra edición. Omega SA, 1998.

**Blanco, Antonio.** *Química Biológica*. 7ma. edición. Editorial Ateneo.

**Brown, Theodore.** *Química, la ciencia central*. 11era edición. Pearson educación de México S.A., 2009.

**Chang, Raymond.** *Química*. 6ta edición. McGraw Hill. 2001.

**Escudero, Pilar; Lauzurica, María Teresa; Pascual, Raimundo; Pastor, José María.** *Físico-química*. Santillana. 2008.

**Freedman, R; Young, H.; Sears Zemansky:** *Física universitaria*. Editorial Pearson Prentice-Hall. 2009.

**Labate, Hugo; Briuolo, Paula; Botto, Juan L.** *Ciencias Naturales. Química 8*. AZ editora SA, 3er ciclo EGB. 2001.

**Lehninger, A.** *Principios de Bioquímica*. Editorial Omega.

**Máximo, A; Alvarenga, B.** *Física General con experimentos sencillos*. Editorial Oxford. 4ta edición. 2010.

**Petrucci, Ralph.** *Química general, enlace químico y estructura de la materia*. 8va edición. Pearson educación SA, 2005.

**Rolando, Aída; Jellinek, Mario.** *Química 4*. A-Z Editorial. Serie Plata.

**Stryer, I y otros.** *Bioquímica*. 5ta edición. Editorial Reverté.

**Sztrajman, J.; Rela, A; Cerdeira, S.; Orti, E.** *Física-Química*. Editorial AIQUE. 2005.

### Páginas de Internet

- [Bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sities/ciencia/volumen3/ciencia3/122/htmsec\\_5.htm](http://Bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sities/ciencia/volumen3/ciencia3/122/htmsec_5.htm)
- [www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2000024/lecciones/cap01/01\\_01\\_10.htm](http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2000024/lecciones/cap01/01_01_10.htm)