**Universidad Nacional del Litoral**
Secretaría Académica
Dirección de Articulación, Ingreso y Permanencia
Año 2015

# **Matemática**
# para el ingreso

ISBN en trámite

# **Unidad 4.** Función

Elena Fernández de Carrera / Gloria Elida Moretto / Lina Mónica Oviedo
Nélida Mamut de Bergesio / Liliana E. Contini / Stella M. Vaira / Liliana Taborda

En este capítulo presentamos un tema nuevo, el de función.

La palabra **función** se usa con diferentes significados. Trataremos de delimitar cuál nos interesa y de limar varias imprecisiones del lenguaje diario.

¿Cuántas veces ha escuchado expresiones como las siguientes?

1. La cantidad de público que asiste se da en función del grupo musical que se presenta.
2. El sueldo que cobra está en función de la calidad de su trabajo.
3. La función del circo está por comenzar.
4. El volumen de un gas es función de la presión que soporta.

Damos a continuación algunas de las acepciones del concepto de función que nos aporta el diccionario de la Lengua Española en su edición on-line 2005.

**Función:** (del latín functio-onis)

1. f. Capacidad de actuar propia de los seres vivos y de sus órganos, y de las máquinas o instrumentos.
2. f. Tarea que corresponde realizar a una institución o entidad, o a sus órganos o personas.
3. f. Acto solemne, especialmente el religioso.
4. f. Representación de una obra teatral, o proyección de una película.

13. f. *Mat.* Relación entre dos conjuntos que asigna a cada elemento del primero un elemento del segundo.

Del análisis de los ejemplos y la definición del diccionario, la que nos interesa desde el punto de vista matemático es la 13. ¿Con cuáles de los ejemplos anteriores se corresponde?.......................

Pero de cualquier manera se observa que el lenguaje coloquial tiene imprecisiones. Estas imprecisiones no son convenientes desde el punto de vista de la matemática, por ello vamos a dar una definición de función:

Una variable **y** se dice que es **función** de otra variable **x**, cuando a cada valor de **x** le corresponde **uno y sólo un** valor de **y**.

Para simbolizar una función se escribe **y = f(x)**; **x** se llama variable independiente e **y** variable dependiente. La expresión **y = f(x)** se lee *"y es igual a f de x".*

El conjunto de los valores que puede tomar la variable **x** se llama el *conjunto de partida* o el *dominio* de la función y lo simbolizaremos $D_f$. El conjunto donde están los valores que toma la función se llama *conjunto de llegada.* Los valores que toma la función constituyen el *rango, conjunto imagen* o simplemente *imagen* de la función y lo simbolizamos $Im_f$.

Las funciones se simbolizan generalmente con letras minúsculas, aunque a veces se usen letras mayúsculas u otros símbolos. Así escribiremos:

$f: A \to B$

y leemos "f de A en B" o "f es una función de A en B"; A es el dominio de f y B es el conjunto de llegada.

Ejemplo 1:

Sea A= {Na, Cl, U, O, C, Br, H} y B= N. La función de A en B es la que a cada elemento químico le hace corresponder un número igual a la cantidad de electrones que posee. Entonces

| | | | |
|---|---|---|---|
| (Sodio) | Na $\to$ 11 | ó | (Na, 11) |
| (Cloro) | Cl $\to$ 17 | ó | (Cl, 17) |
| (Uranio) | U $\to$ 92 | ó | (U, 92) |
| ( Oxígeno ) | O $\to$ ..... | ó | (O, .....) |
| (.............) | C $\to$ ....... | ó | (C, .......) |
| (...............) | Br $\to$ ...... | ó | (Br, .......) |
| (...............) | H $\to$ ....... | ó | ( H, .......) |

*Completar los datos que faltan. Puede buscarlos en una tabla periódica.*

**(1)**

Si simbolizamos esta función con f podemos escribir

$$f(\text{Na}) = 11 \qquad\qquad f(\text{Cl}) = 17$$

y leemos "f de sodio igual a 11", "f de cloro igual a 17", también podemos decir "la **imagen** del sodio es 11".

*¿Cuál es la imagen del uranio?*

*¿Cuál es la imagen del bromo?*

**(2)**

$A = D_f$, $Im_f = \{1, 6, 8, 11, 17, 35, 92\}$ que es un subconjunto de B.

Ejemplo 2:

Sea A = {Raúl, Jorge, Ana, Susana, María}, B = N y la correspondencia *g* que a cada integrante de A asigna la cantidad de respuestas correctas en la evaluación del Curso Introductorio de Matemática.

| | | |
|---|---|---|
| Rául | → | 8 |
| Jorge | → | 5 |
| Ana | → | 8 |
| Susana | → | 3 |
| María | → | 9 |

Entonces la correspondencia $g$: A → N es una función.

Además

*g (Raúl)=* .............

*La imagen de María es* ..............

*¿Cuál es $Im_g$?*

**(3)**

Ejemplo 3:

Se considera la misma correspondencia del ejemplo 2 pero donde A = {Raúl, Jorge, Ana, Susana, María, Gabriela Sabatini}. Los valores que se asignan a cada elemento son los ya mencionados sólo que, como Sabatini no fue alumna del curso, no tiene elemento de B asignado, por lo tanto la correspondencia **no es función**.

Ejemplo 4:

Sean A y B dos conjuntos iguales formados por todos los números reales (para indicar esto podemos escribir $A = B = \Re$ y **f** la correspondencia que a cada elemento de A le asigna su cuadrado en B.

Esta correspondencia es posible escribirla por medio de la fórmula $\mathbf{f}(x) = x^2$.

También podemos escribir $y = x^2$ y con esto decimos que llamamos **y** a **f** ( x ).

Ya dijimos que las letras **x** e **y** son variables; **x** varía tomando todos los valores del dominio; **y** varía tomando valores en el conjunto de llegada.

El valor de **y** depende **del valor que toma x y de la correspondencia**. Es por eso que la variable independiente es **x** y la variable dependiente es **y** o **f** (**x**).

Hallemos la imagen de algunos elementos del dominio.

$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2$$

$$f(\pi) = \pi^2$$

$$f(3/2) = ........$$

$$f(-1/5) = ...........$$

En este caso es más fácil disponer estos valores en una pequeña tabla de valores.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | - 1 | - 1/ 5 | 0 | $\sqrt{2}$ | 3/2 | $\pi$ |
| $y = x^2$ | 1 | | | 2 | | $\pi^2$ |

Completar los valores faltantes.

*¿Cuál es* $Im_f$*?*

**(4)**

Ejemplo 5:

Sean A = B = $\Re$ e y = $\sqrt{x}$ . Confeccionemos la tabla correspondiente a algunos valores

| x | 4 | 9/ 2 | 0 | $\pi$ | - 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{x}$ | 2 | $3/\sqrt{2}$ | 0 | $\sqrt{\pi}$ | $\sqrt{-1}$ |

¿Es está una función de $\Re$ en $\Re$? Podemos observar que a -1 no le corresponde ningún número en el conjunto de llegada que propusimos pues $\sqrt{-1}$ no es un número real, entonces esta correspondencia **no** define una función de $\Re$ en $\Re$.

Ejemplo 6:

Sean A = {1, 2, 3, 4}, B = {1, 2, 3} y h de A en B dada por la siguiente tabla:

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| h (x) | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |

Observe que a 2 le corresponden los números 1 y 2 y por lo tanto esta correspondencia **no** es función.

Es importante observar que es éste el motivo por el cual h **no** es función y no el hecho que a 1, 2 y 3 les corresponda el mismo número 1.

Al definir una función es necesario especificar su dominio y su conjunto de llegada para poder establecer exactamente si la correspondencia es funcional.

Observación:

No todas las funciones pueden ser definidas a través de una fórmula matemática. Tenga en cuenta los ejemplos 1 y 2.

Apliquemos lo visto hasta ahora a los siguientes ejercicios:

*a) Determine cuáles de las siguientes correspondencias son funciones y cuáles no. Justifique su respuesta.*

*i)* $A = \{2, 3, 4, 5\}$ $B = \{5, 7, 3, 2\}$

$f: A \to B$ *tal que* $f(5) = 7;$ $f(2) = 2;$ $f(3) = 3;$ $f(4) = 5$

*ii) A y B igual que en i) y la correspondencia de A en B:*

$2 \to 5;\ 3 \to 7;\ 4 \to 7;\ 5 \to 3$

*iii) A y B igual que en i) y la correspondencia*

*(2, 5); (3, 7); (4, 7); (5, 3); (2; 3)*

*iv) A y B igual que en i) y la correspondencia*

$2 \to 3$; $4 \to 2$; $5 \to 7$

*v) A: es el conjunto de todos los alumnos que asisten a su escuela.*

*B: el conjunto de los números naturales.*

*La correspondencia asigna a cada alumno el número de años cumplidos hasta este momento.*

*vi)* $A = Q$

*B: el conjunto de las expresiones decimales de los números racionales.*

*La correspondencia de A en B asigna a cada número racional su expresión decimal.*

*b) ¿Qué pasa si intercambiamos los papeles de A y B en el ejercicio a)v) y también invertimos la correspondencia? ¿Es función? ¿Por qué?*

*c) i) ¿Puede establecer una correspondencia que sea función de A en B siendo* $A = \{k\}$ *y* $B = \{h, i, j\}$*?*

*ii) ¿Cuántas funciones distintas de A en B se pueden construir, si A y B son los mismos conjuntos del inciso i)?*

*iii) ¿Puede establecer una correspondencia que sea función de B en A si A y B son los conjuntos del inciso i)?*

*iv) Si A y B son los conjuntos del inciso i) ¿cuántas funciones distintas de B en A se pueden construir?*

*d) Construya una función cuyo dominio sea el conjunto formado por tres compañeros y su conjunto de llegada sea {Borges, Sábato}.*

*e) Dados* $A = \{2,3,4\}$ *y* $B = \{6,8,7\}$

*i) Completar la tabla de la correspondencia de A en B "es divisor de"*

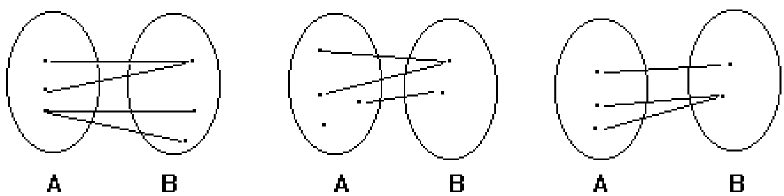
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 2 | | | |
| y | 6 | | | |

*ii) ¿Es función esta correspondencia? ¿Por qué?*

*iii) ¿Cuál es la respuesta a la pregunta anterior si mantenemos la correspondencia y hacemos $A = B = N$?*

*f) Invente una correspondencia que sea función donde el dominio sea el conjunto de todos los polinomios, excepto el nulo y el conjunto de llegada el que usted sugiera.*

*g) Indicar cuál de los siguientes diagramas corresponden a funciones de A en B.*




*Justifique su respuesta.*

**(5)**

*Funciones Escalares o de Variable Real*

Se denominan funciones escalares a aquellas en las cuales el dominio y el conjunto de llegada están incluidos en el conjunto de los números reales.

De los ejemplos 1 a 6 que le dimos al comienzo sólo el ejemplo 4 es función escalar.
*En el ejemplo 5, si modificamos el dominio, es decir, si consideramos como dominio el conjunto de los reales no negativos la correspondencia sí es una función. ¿Por qué?*

**(6)**

Para designar al conjunto de los números reales no negativos, esto es los reales mayores o iguales a cero, usamos el símbolo $\Re^+_o$.
Podemos entonces concluir que f: $\Re^+_o \rightarrow \Re$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ es una función, además es una función escalar.
Las funciones escalares tienen la ventaja que, en algunos casos, se pueden identificar a través de una fórmula matemática, lo que las hace muy cómodas.

Observación: dada una función mediante una fórmula, si no se especifica el dominio convendremos en considerar como tal al conjunto más amplio posible. Así, si decimos "sea la función $y = 3x + 2$ con dominio $\{x \in \Re : x > 3\}$" hemos indicado especialmente el conjunto tomado como dominio. Pero si decimos "sea la función y = 2x – 1" sobreentendemos que el dominio es $\Re$.

Veamos otros ejemplos referidos a funciones escalares:

1) Sea la función escalar $y = -\sqrt{x}$

La palabra **escalar** nos dice que $\sqrt{x}$ **debe ser** un número real y para que esto sea posible debe ser $x \geq 0$. Entonces el dominio de esta función es $\Re^+_o$.

2) Hallemos el dominio más amplio de la función $y = 1 / x$.

Como el único problema es **no** poder dividir por cero, el dominio es $\Re - \{ 0 \}$

3) El dominio de $y = x^2 - 3$ es $\Re$.

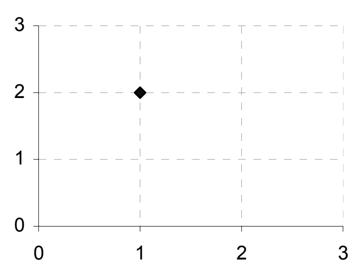
4) El dominio de $y = 3x - \sqrt{2}$ es $\Re$.

5) El dominio de $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ es $\Re^+$.

(Observar que con esta notación no incluimos el cero).

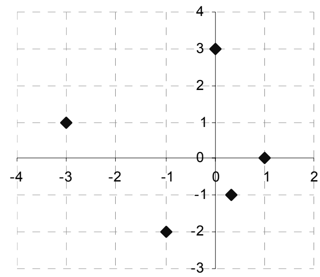
Dado que las funciones escalares tienen como dominio e imagen conjuntos de números reales, es posible representarlas gráficamente en un par de ejes cartesianos.

Recordemos cómo se representa un par de números. Por ejemplo el par (1, 2) se representa de la siguiente manera:



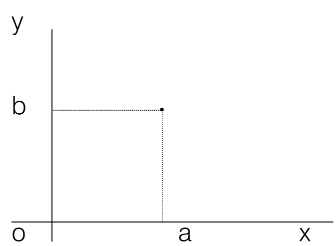

Recordemos además que el conjunto de todos los pares ordenados de números reales se indica $\Re^2$.

Marquemos otros pares ordenados de números reales en el plano, por ejemplo (-3,1); (1/3,-1); (-1, -2); (0, 3); (1, 0).




Podemos concluir que a cada par ordenado de números reales le corresponde un punto en el plano.

Recíprocamente, si tomamos un punto del plano y trazamos por él rectas perpendiculares a los ejes coordenados, podemos observar que dichas perpendiculares determinan sobre el eje x el punto a y sobre el eje y el punto b. Luego el punto corresponde al par ordenado (a,b).




Al número <u>a</u> se lo llama **abscisa** del punto, y al número <u>b</u> se lo llama **ordenada** del punto. La recta horizontal se llama eje de abscisas, la recta vertical eje de ordenadas y al punto O origen de coordenadas.

De esta manera, el plano resulta una representación, un modelo geométrico de $\Re^2$, así como la recta es un modelo geométrico de $\Re$. Es tan común en matemática el uso de estos dos modelos que frecuentemente se habla de $\Re$ como de la "recta real" y de $\Re^2$ como el "plano real".

La región del plano correspondiente a pares ( a,b ) con **a** y **b** positivos se denomina **primer cuadrante;** la correspondiente a **a** negativo y **b** positivo, **segundo cuadrante**; la correspondiente a **a** y **b** negativos, **tercer cuadrante** y la correspondiente a **a** positivo y **b** negativo, **cuarto cuadrante**.

| | |
|---|---|
| 2do. Cuadrante | 1er. cuadrante |
| 3er. Cuadrante | 4to. cuadrante |

Volvamos a nuestro problema de representar funciones. Si tenemos una función de $\Re$ en $\Re$ que representamos **y = f ( x )**, significa que a cada número real x le corresponde, por esta función, un **único número real y.** Llamamos gráfico de la función f al conjunto de todos los pares ordenados ( x, y ) tales que **y** es el número que le corresponde a **x** por la función.

Así por ejemplo, para la función $y = x^2$, los siguientes pares ordenados forman parte de su gráfico:

$$(-1,1);\quad (-\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{25});\quad (\sqrt{2},2),\quad (\tfrac{3}{2},\tfrac{9}{4}),\quad (2,4)$$

ya que, como hemos comprobado $(-1)^2 = 1,\ (-\tfrac{1}{5})^2 = \tfrac{1}{25},$ etc.

En cambio, los siguientes pares ordenados no forman parte del gráfico de $y = x^2$

(1, 2) , (-1, -1) , (5, 4)

debido a que: $1^2 \neq 2$, $(-1)^2 \neq -1$, y $5^2 \neq 4$

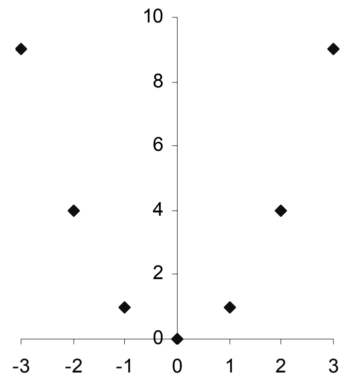
Trate de sacar una conclusión relativa a la pertenencia o no de todos los puntos del plano al gráfico de la función. Piénsela, escríbala y recién después continúe leyendo.

Como vemos, para una función particular, su gráfica es un conjunto de pares ordenados, pero **no de todos** los pares. Por ser un subconjunto de pares ordenados, **el gráfico de una función es subconjunto de $\Re^2$,** es una parte de $\Re^2$ y por lo que dijimos recién, el gráfico de una función no es igual a $\Re^2$, no es **todo** $\Re^2$ sino sólo una parte de él.

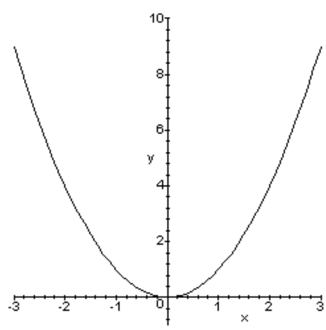
Ya que el gráfico de una función es un subconjunto de $\Re^2$ y $\Re^2$ tiene como representación geométrica al plano, el gráfico de una función se puede representar geométricamente como una parte del plano. Dicha representación se denomina **representación gráfica** de la función dada. Veamos, por ejemplo, cuál es la representación gráfica de la función $y = x^2$ del ejemplo 4. Para ello hagamos una tabla con algunos valores.

| **x** | 0 | 1 | -1 | 2 | -2 | 1/2 | -1/2 | 3/2 | -3/2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **y = x²** | 0 | 1 | 1 | 4 | 4 | 1/4 | 1/4 | 9/4 | 9/4 |

Representemos en el plano estos pares ordenados que desde luego no es todo el gráfico de la función $y = x^2$, sino sólo algunos de sus puntos.




Estamos ahora en una de esas situaciones en las cuales hay que saltar a las conclusiones. No podemos esperar representar geométricamente **todos** los pares ordenados del gráfico $y = x^2$ por que son infinitos, dado el dominio elegido. Pero, lo hecho hasta ahora nos está haciendo sospechar cuál va a ser el resultado, y con toda audacia unimos los puntos representados y obtenemos la representación gráfica de $y = x^2$.




¿Cómo aseguramos que ésta es efectivamente la representación gráfica de $y = x^2$? No contamos con los elementos necesarios para estar seguros de ello. Podríamos dar algunos argumentos pero no lo haremos. Sólo confiamos en nuestra intuición por ahora. Seremos más convincentes en el estudio de la representación gráfica de las funciones lineales que nos interesan en este capítulo.

Convengamos en aceptar que la representación gráfica de $y = x^2$ es la del dibujo, y ahora:

1) Digamos las cosas de otra manera:

La expresión $y=x^2$ es una ecuación con dos variables: x e y. Esta ecuación tiene infinitas soluciones, el par (2, 4) es una de ellas.

Generalizando, la expresión "el par ordenado (a, b) es un punto de la gráfica $y=x^2$" es equivalente a "el par (a, b) es solución de la ecuación $y=x^2$".

2) Recordemos a través del siguiente cuadro

| Posiciones | Se designa | En él representamos |
|---|---|---|
| Eje horizontal | Eje x ó eje ox ó eje de abscisas | El dominio |
| Eje vertical | Eje y ó eje oy ó eje de ordenadas | El conjunto imagen |

Si ha leído y discutido el párrafo precedente, podrá resolver sin mayores dificultades los siguientes ejercicios.

a) *Decir a qué cuadrante pertenecen estos puntos analizando solamente el signo de las componentes:*

(-2, 5).....................................*porque*.................................

*($\pi$, 3/4)*...................................*porque*..................................

*( $\sqrt{2}$ ,-1/2)*.............................*porque*...................................

*(0,1)* ......................................*porque*....................................

*(3, 0)*.......................................*porque*.....................................

*(-1, -2)*....................................*porque*.....................................

*b)*

*i) Representar gráficamente los siguientes puntos:*

*(2, -4) ; (3, 0) ; (-1, -1/2) ; (6, 1) ; (-2, 6)*

*ii) En otro color representar dos puntos del primer cuadrante, uno del tercero y uno del cuarto.*

*iii) Elegir un punto tal que la primera coordenada sea un entero par y la segunda coordenada sea la mitad opuesta de la primera.*

*c) Dada la función f: $\Re \rightarrow \Re$, definida por $y = 3x^2 - 1$*

*i) Completar la siguiente tabla de valores*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | -2 | -1 | -1/2 | 0 | 1/2 | 1 | $\sqrt{2}$ |
| y | | | | | | | |

*ii) Usando la calculadora hallar f ($\pi$) aproximadamente.*

*iii) Indicar si los siguientes puntos pertenecen o no al gráfico de la función:*

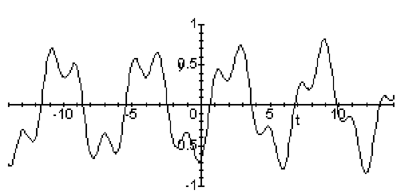
*(0, 1) ; (0, 2); $(\frac{1}{\sqrt{3}},0)$ y ( 2, 12)*

*iv) Buscar cuatro pares que sean solución de la ecuación $y = 3x^2 - 1$*

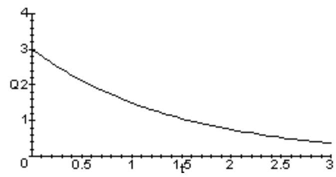
**(7)**

Le damos mucha trascendencia al gráfico de la función porque su visualización nos permite una imagen rápida y global de la misma. En los estudios universitarios y en la vida diaria se encontrará con gráficos como éstos:

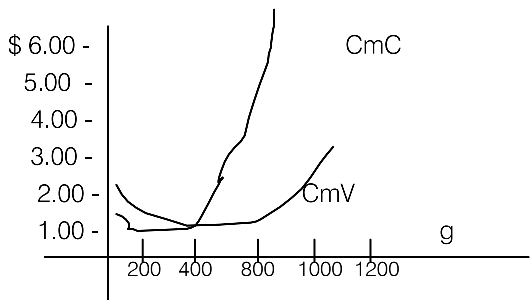
Esta función se parece a la gráfica de un electrocardiograma. El médico no necesita saber cuál es la ley, con sólo mirar la gráfica puede saber si su paciente está o no enfermo.



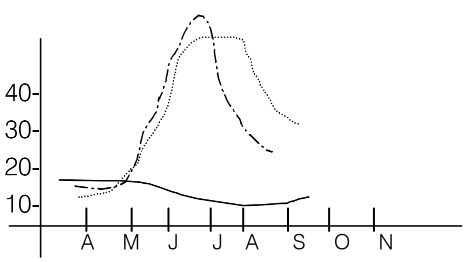

La desintegración de una sustancia radioactiva se lleva a cabo según una función como la de la gráfica donde 3 gramos es la cantidad de sustancia en el instante inicial.




La relación entre el costo marginal variable (CmV) y el costo marginal (CmC), se puede ver en el siguiente gráfico:



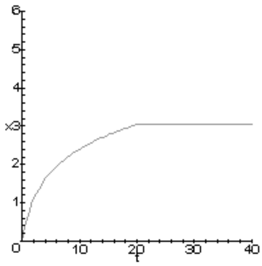

Las siguientes son las curvas de producción de tres tipos de pasturas en kg/ha/día en función de los meses del año de abril a noviembre.




| | |
|---|---|
| ___ | Avena |
| _ . _ . | Rraigrás |
| ..... | Avena-Rraigrás |

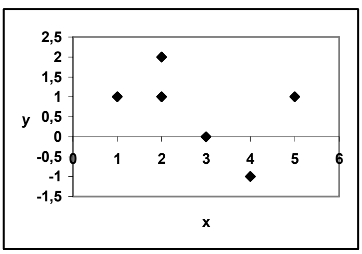
Absorción de fármacos

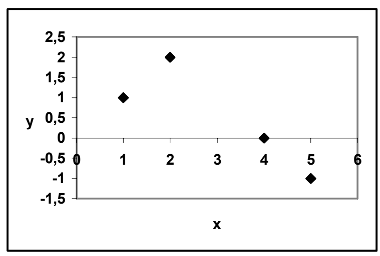
Llamamos x a la concentración de droga absorbida por el organismo en función del tiempo

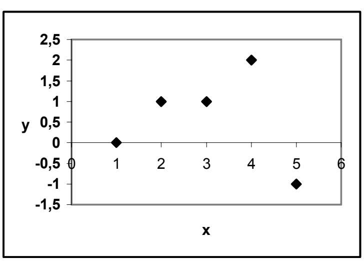


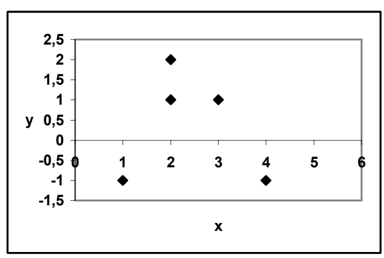
Aprendamos a sacar la información de un gráfico

Sean A ={ 1, 2, 3, 4, 5} y B = { -1, 0, 1, 2 }, analicemos cuáles de los siguientes subconjuntos de $\Re^2$ son gráficos de funciones de A en B









En el primer ejemplo los puntos de $\Re^2$ que constituyen el gráfico de la correspondencia son: (1, 1); (2, 1); (2, 2); (3, 0); (4, -1); (5,1) y como a 2 le corresponden dos valores distintos, la misma **no es función de A en B.**

En el segundo ejemplo los puntos son (1, 1); (2, 2); (4, 0); (5, -1) y como a 3 no le corresponde ningún valor **no es función de A en B.**

En el tercer ejemplo cada elemento de A tiene una sola imagen en B por lo tanto **es función de A en B.**

En el cuarto ejemplo a 2 le corresponden 1 y 2; y a 5 no le corresponde ningún valor, por lo tanto **no es función de A en B.**

Del tercer ejemplo que representa el gráfico de una función, podemos sacar alguna información que suele ser útil.

*Si denotamos con f a la función:*

*¿Para cuáles valores del dominio es f (x) > 0?*

*¿Para cuáles valores del dominio es f (x) = 0?*

*¿Para cuáles valores del dominio es f (x) < 0?*

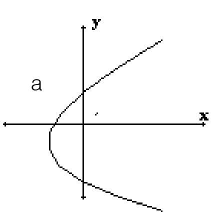
*Estas preguntas se pueden contestar con sólo mirar el gráfico. Proponemos responderlas y antes de seguir con el estudio controlar las respuestas.*

**(8)**

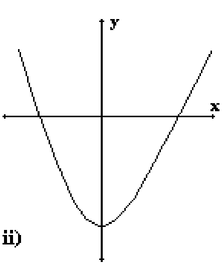
Podemos concluir entonces que para responder las tres preguntas anteriores tenemos que observar cuáles puntos del gráfico están **arriba** del eje x; cuáles están **en** el eje x y cuáles se encuentran **abajo** del eje x, respectivamente.

Resolvamos algunos ejercicios

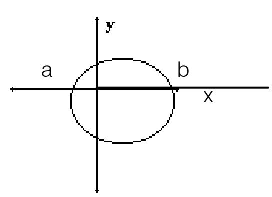
*a) De los siguientes subconjuntos de $\Re^2$ indique cuáles corresponden a funciones de $\Re$ en $\Re$. Justifique su respuesta.*



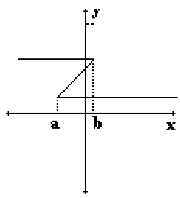

i)



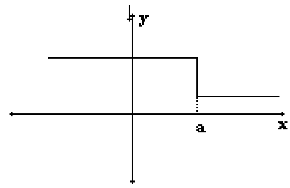

ii)



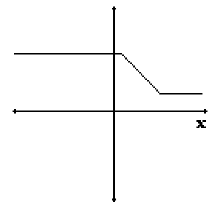

iii)



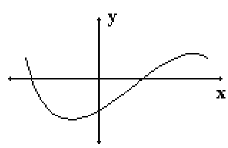

iv)



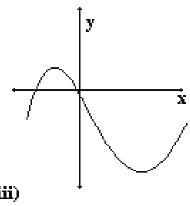

v)



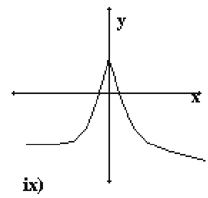

vi)




vii)

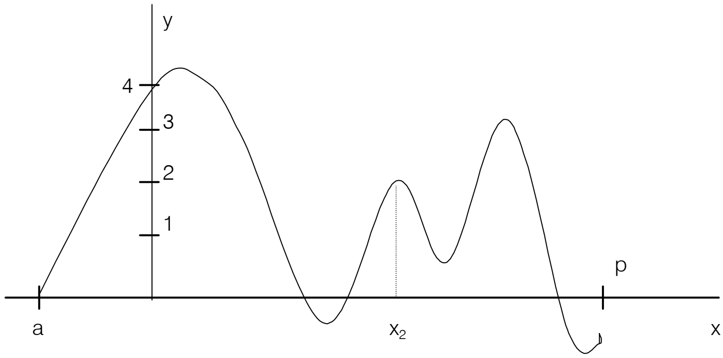



viii)




ix)

*b) Sea la función $y = f(x)$ dada por el gráfico*




*i) Marcar sobre el mismo las abscisas para las cuales $f(x) = 0$*

*ii) Idem para $f(x) = 1$*

*iii) Los subconjuntos para los cuales $f(x) > 0$*

*v) Los puntos para los cuales $f(x) = f(x_2)$*

*vi) ¿Para cuáles valores de x es $f(x) > 4$?*

*vii) ¿Para cuáles valores de x es $f(x) \leq 4$?*

**(9)**

## ¿Qué fue hasta aquí lo esencial?

**Definición de función:** Una variable *y* se dice que es *función* de otra variable *x*, cuando a cada valor de *x* le corresponde **uno y sólo un** valor de *y.*

**Dominio de una función:** El conjunto de los valores que puede tomar la variable *x* se llama el *conjunto de partida* o el *dominio* de la función y lo simbolizamos $D_f$.

**Imagen de una función**: El conjunto donde están los valores que toma la función se llama *conjunto de llegada.* Los valores que toma la función constituyen el *rango, conjunto imagen* o simplemente *imagen* de la función y lo simbolizamos $Im_f$ .

Si $y = f(x)$, $x$ se llama **variable independiente**; $y$ ó $f(x)$ se llama **variable dependiente**.

Una función se llama **escalar** si su dominio e imagen son conjuntos de números reales.

El gráfico de una función escalar es un subconjunto de $R^2$, y se puede representar como una parte del plano.

Para reconocer si un gráfico es la representación gráfica de una función trazamos rectas verticales. Si alguna de ellas corta al gráfico en más de un punto **no es función.**

## La función polinómica de primer grado o función lineal

Como siempre, vamos a empezar por lo más fácil y además trataremos de repasar lo dado. En el capítulo 3 definimos como polinomio de grado n a la expresión:

$a_n x^n$ + ........................................................

Completar la expresión simbólica anterior y explicitar las condiciones que deben cumplir n y los coeficientes $a_i$. Revisar en el capítulo 3 para controlar que sea correcta la respuesta.

De este modo a un polinomio de 1er. grado le corresponde la expresión

$\mathbf{a_1x + a_0}$ con $\mathbf{a_1 \neq 0}$

**Sean A y B iguales a $\Re$. Llamamos función polinómica de 1er. grado a la función de A en B tal que $y = a_1 x + a_0$ donde $a_1$ y $a_0$ son reales y $a_1 \neq 0$.**

*a) Escribir la función polinómica de 1er. grado en la cual*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *i)* | $a_1 = 1$ | *y* | $a_0 = 2$ |
| *ii)* | $a_1 = -1$ | *y* | $a_0 = 0$ |
| *iii)* | $a_1 = \sqrt{3}$ | *y* | $a_0 = -1$ |
| *iv)* | $a_1 = \frac{3}{5}$ | *y* | $a_0 = 0$ |
| *v)* | $a_1 = 1$ | *y* | $a_0 = 0$ |

*b) Identifique $a_0$ y $a_1$ en las siguientes funciones en las que consideramos $A = B = \Re$*

i) $y = -x + 3$

ii) $y = 2x - 1$

iii) $y = 3x$

iv) $y = -1/2\, x - \sqrt{2}$

v) $y = -7/2\, x$

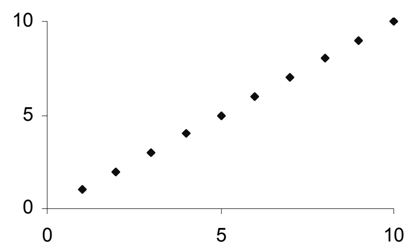
**(10)**

Ya hemos estudiado gráficas de funciones. Tratemos ahora de descubrir cuál es la gráfica de la función de primer grado. Lo haremos paso a paso; partiendo de lo más simple a lo más complejo.

**I**.- La función de 1er. grado **y = x** se llama **función idéntica o identidad**. La razón es que, evidentemente, la imagen de cualquier número real es el mismo número real, es decir, a ella pertenecen todos los pares de la forma (a, a).

Consideremos los siguientes casos:

*a) f: N → ℜ tal que y = x . ¿Representamos algunos pares de su gráfico?*



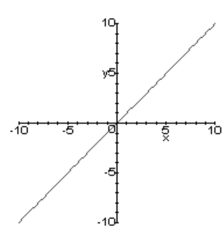

A= *N*, B = ℜ

Obtenemos "puntos aislados de la bisectriz del primer cuadrante". Aquellos de "coordenada natural" o entera positiva.

*b) Sea f: Z → ℜ tal que y = x. Representar gráficamente y extraer alguna conclusión siguiendo el razonamiento del caso anterior.*

**(11)**

*c) Sea f: ℜ → ℜ tal que f (x) = x. ¿Representamos?*



¿Por qué hemos podido trazar la recta en este caso? Porque el dominio es $\Re$ que es un conjunto "denso y completo", como dijimos en el capítulo 2.

Podemos concluir entonces que:

La representación gráfica o simplemente gráfica de la función idéntica, en el caso de dominio el conjunto de los números reales, es la recta bisectriz del 1er. y 3er. cuadrante.

**II**.-La función $\mathbf{y = a_1 x}$ , $a_1 \in \Re$; recibe el nombre de función lineal o función homogénea de 1er. grado porque $a_0 = 0$.

Si $a_1 = 1$ "aparece nuevamente la función idéntica". Por lo tanto ella es un caso especial de función lineal. Vamos a demostrar ahora una propiedad importante de las funciones lineales, sobre todo por su utilidad.

Teorema: la función escalar cuyo gráfico es una recta que pasa por el origen de coordenadas es siempre una función lineal.

*Es importante saber que toda función lineal se representa gráficamente mediante una recta. Además, para esa representación sólo necesitamos dos puntos ¿Por qué? (La respuesta a esta pregunta puede "rastrearse" en lo estudiado en geometría en la escuela).*

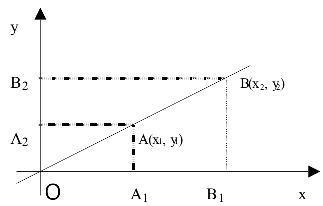
**(12)**

Como en particular la recta $y = a_1x$ pasa por el origen de coordenadas, sólo necesitamos otro punto para representarla.

Demostremos el teorema

Debemos demostrar que si una recta que pasa por el origen es la gráfica de una función escalar, entonces esa función es de la forma $y = a_1 x$.

Trazamos entonces una recta r que pasa por el origen y que sea la gráfica de una función escalar.




*¿Puede ser una recta vertical?*

**(13)**

Tomamos dos puntos A y B sobre la recta y trazamos las coordenadas de esos puntos. Nos quedan determinados dos triángulos rectángulos $OA_1A$ y $OB_1B$ que resultan semejantes por tener

$OAA_1$ y $OBB_1$ por ser ángulos correspondientes entre las paralelas..................y la transversal..........

*Completar en las líneas de puntos.*

**(14)**

Como los triángulos son semejantes sus lados homólogos son proporcionales, en particular sus catetos:

$$\frac{A_1A}{OA_1} = \frac{B_1B}{OB_1} \quad ❶$$

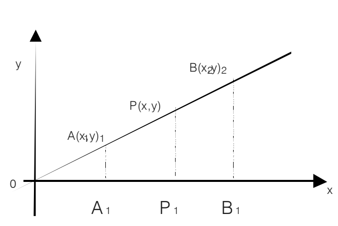
pero

medida de $A_1A = y_1$
medida de $0\,A_1 = x_1$
medida de $B_1B = y_2$
medida de $0\,B_1 = x_2$

sustituyendo en la proporción ❶ resulta $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$

Es decir, el cociente entre las coordenadas es constante. Llamemos **m** a ese valor constante.

Si tomamos ahora otro punto cualquiera P (x, y) de los infinitos puntos de la recta, excepto el (0, 0) quedarán formados triángulos rectángulos semejantes a los anteriores cuyos lados verificarán la misma proporción.




Es decir:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y}{x} = m$$

Por lo tanto $\frac{y}{x} = m$ o lo que es lo mismo $y = mx$ y esta última expresión

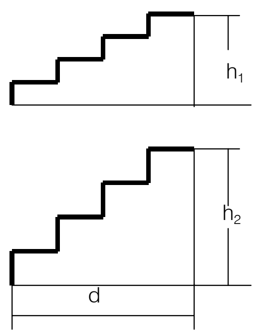
no es más que la correspondiente a una función lineal con $a_1 = \mathbf{m}$.

**Observación**: a la constante **m** se la llama **pendiente** de la recta.

*¿Cuál es la razón de este nombre?*

El concepto de pendiente de una recta puede asociarse al concepto de pendiente de una rampa, de un camino o de una escalera. Estas son cuestiones de las que hablamos en la vida cotidiana.

La pendiente es la razón entre la altura h que subimos y el desplazamiento horizontal d.

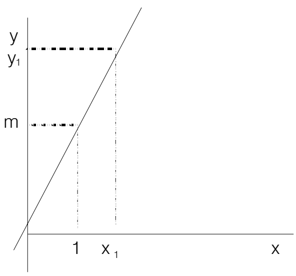



El recíproco del teorema es también verdadero, es decir:

La representación gráfica de una función lineal es siempre una recta que pasa por el origen.

Esta afirmación no la vamos a demostrar, solamente haremos un razonamiento intuitivo.

Sea la función lineal $y = mx$. Dos puntos de la gráfica de esa función son (0, 0) y (1, m). Tracemos la recta que pasa por esos dos puntos. La pendiente de esa recta es $\frac{m}{1} = m$




Vamos a comprobar que cualquier otro punto que pertenezca a la gráfica de y = mx está sobre la recta trazada.

Tomemos otro par ($x_1$, $y_1$) que pertenece al gráfico de y = mx, esto nos dice que $y_1 = mx_1$ , o lo que es lo mismo $\frac{y_1}{x_1} =y \frac{m}{1} = m$ por lo tanto ( $x_1$, $y_1$) está sobre la recta de pendiente m.

Conclusión: la representación gráfica de y = mx. es la recta que pasa por el origen y tiene pendiente m.

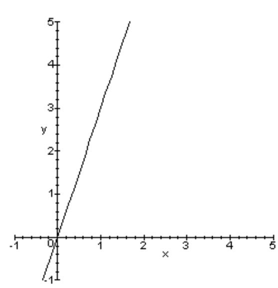
Aprendamos a graficar las funciones lineales

a) Grafiquemos y = 3 x.

— Como pasa por el origen de coordenadas (0, 0) es un punto.

— Otro punto lo obtenemos dando un valor a x̲ y obteniendo el valor de y para que el par ( x, y ) sea solución de y = 3x. Por ejemplo (1, 3)

— Dibujemos la recta que pasa por esos dos puntos.




La recta tiene pendiente 3.

b) Representemos gráficamente $3y = 2x$

— Despejemos y. Es $y = \frac{2}{3}x$. La recta tiene pendiente $\frac{2}{3}$

— Un punto es (0, 0); otro punto es (3, 2).

*Graficar la recta*

*c) Grafiquemos* $y = \frac{-1}{3}xa$ *. Un punto es (0, 0)*

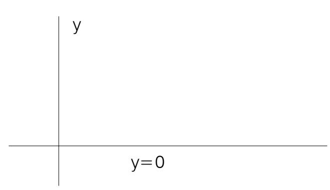
*— Buscar otro punto.*

*— Graficar la recta.*

**(15)**

Observación: hemos llamado función lineal a la función $y = ax$ con $a \in \Re$.

¿Por qué no exigimos $a \neq 0$? Porque tomamos un caso más general y le permitimos a la función tomar la forma especial $y = 0$ cuya gráfica también es una recta que pasa por el origen. Aquella cuyos puntos tienen ordenada nula, o sea el eje $o\vec{x}$



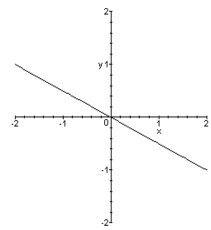

Como se puede observar es un "camino sin pendiente", es decir es una recta con pendiente nula.

Ejercicios

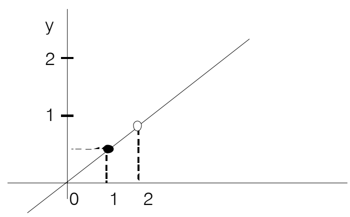
*a) Representar gráficamente las siguientes funciones lineales*

*i)* $y = 3x$ *ii)* $y = \frac{-1}{5}x$

*b) Completar el siguiente cuadro:*

| y | m | Ordenar según las pendientes de mayor a menor | Gráfica |
|---|---|---|---|
| *2x* | | |   |
| *-1/2x* | | | |
| *2,5x* | | | |
| | | | |
| *0* | | | |
| *-x* | | | |

*c) Consideremos una función escalar cuya representación gráfica es la siguiente*




*i) ¿Cuál es la imagen de 1?*

*ii) ¿Cuál es la de imagen de 2?*

*iii) ¿Cuál es el dominio de esta función?*

*iv) ¿Puede decir por la gráfica que se trata de una función de la forma y = $a_1$ x para algún $a_1$?*

*d) Dada*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{4}x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

*i) Graficar*
*ii) ¿Cuál es la imagen de 0?*
*iii) ¿Cuál es el dominio de f?*

*e) Dada*

$$f\,(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{4}x & \text{si } x < 0 \\ 4x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

*i) Hacer el gráfico*
*ii) ¿Cual es la imagen de 0?*
*iii) ¿Cuál es el dominio de f?*

**(16)**

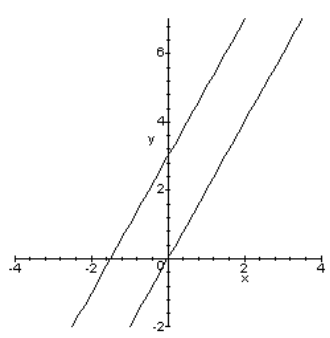
III.- ¿Qué sucede si a la función y = 2x le sumamos una constante, por ejemplo 3?

Obtenemos la función y = 2x + 3. Es fácil ver que a la imagen de cualquier número x le sumamos el valor 3.

Así:

| x | 2x | 2x+3 |
|---|---|---|
| -1 | -2 | 1 |
| -1/2 | -1 | 2 |
| 0 | 0 | 3 |
| 1 | 2 | 5 |

Grafiquemos las dos funciones y = 2x e y = 2x+3



El gráfico de la función $y = 2x$ sufre una "traslación" hacia arriba de 3 unidades. Obtenemos nuevamente una recta como gráfica, sólo que ahora **no pasa** por el origen de coordenadas.

**La función $y = m x + h$ se denomina función lineal no homogénea o función afín. Es la "trasladada" de la función lineal $y = m x$.**

Nota: algunos autores la llaman simplemente **función lineal** porque su representación gráfica es una recta. Nosotros también la llamaremos así.

Observación: la representación gráfica de $y = mx + h$ intersecta al eje $y$ en el punto $(0, h)$. Al número $h$ se lo llama ordenada al origen.

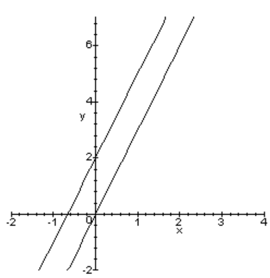
Aprendamos a graficar funciones lineales no homogéneas

1) Sabiendo que es la traslación de una función lineal:

Grafiquemos $y = 3x + 2$ . Su gráfica es una recta de pendiente 3 y ordenada al origen 2. Es decir, es la traslación de $y= 3x$ que pasa por $(0, 2)$. Lo hacemos en dos pasos:

— Graficamos $y = 3x$

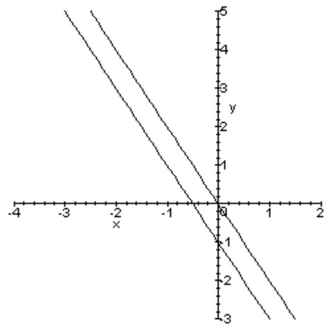
— La trasladamos hasta $(0, 2)$




Grafiquemos $y = - 2x – 1$. Tiene pendiente $–2$ y ordenada al origen $-1$.

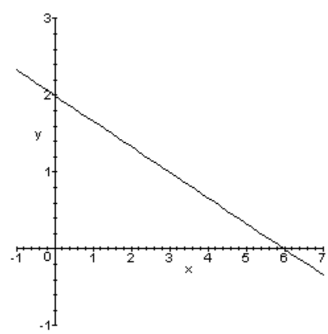
— Graficamos $y = - 2x$

— La trasladamos hasta $( 0, -1 )$




2) Usando dos puntos.

Grafiquemos $y = -\frac{1}{3}x + 2$, buscando dos puntos que pertenezcan a ella. Uno ya lo conocemos: es el ( 0, 2 ), al restante lo determinaremos dándole un valor arbitrario a x. Así por ejemplo, si x = 3 resulta y = 1. Ahora graficamos




Afiancemos estos conocimientos resolviendo algunas actividades.

En un artículo donde se publican las declaraciones del entrenador de un famoso tenista; puede leerse:

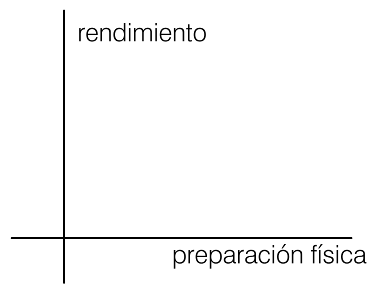
> "Las exigencias emocionales, la tensión en esas circunstancias es muy grande, incluso después de haber ganado un torneo, se vuelve a jugar a las veinticuatro horas. En competencia hay que tener en cuenta que el estado de rendimiento no es lineal, pues responde a determinadas leyes orgánicas, presenta picos ondulatorios, de alto rendimiento y menor nivel"

Leer el artículo con atención y responder:

*a) ¿Qué entendería si el rendimiento fuera lineal?*

*¿Qué curva sería en ese caso su representación gráfica?*

*b) Si se representara en un sistema cartesiano el rendimiento en función de su preparación física, y si éste fuera lineal ¿Cuál sería su representación gráfica?*




*c) Dibuje a su criterio la curva que representaría más adecuadamente el rendimiento en competencia, tratando de reflejar lo que dice el preparador físico del famoso tenista.*

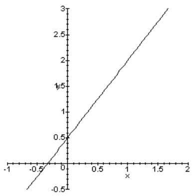

**(17)**

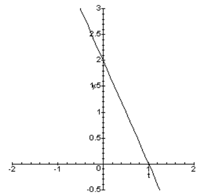
*Ejercicios*

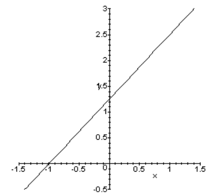
*a) Graficar las siguientes funciones*

*i)* $y = -2x + 2$ *ii)* $y = 0{,}5x + 1{,}5$

*b) Encontrar las funciones cuyas gráficas son las siguientes:*



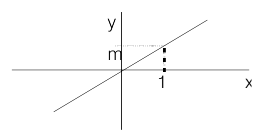
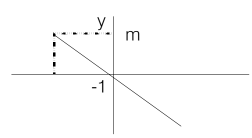
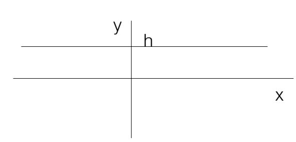
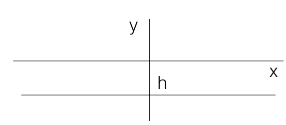


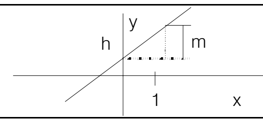
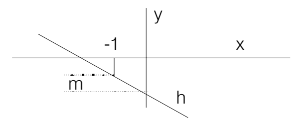


*c) Graficar*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x - 1 & si \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{4}x + 2 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

*d) Completar el siguiente cuadro para la función $y = mx+h$*

| m | h | Gráfica |
|---|---|---|
| $>0$ | $=0$ |  |
| i) | ii) |  |
| $=0$ | $=0$ | iii) |
| iv) | v) |  |
| vi) | vii) |  |

| | | |
|---|---|---|
| viii) | ix) |  |
| <0 | >0 | x) |
| >0 | <0 | xi) |
| xii) | xiii) |  |

e)

*i) ¿Es la ecuación $2x - 3y + 1 = 0$ la ley de una función lineal? Si la respuesta es afirmativa indicar la pendiente, ordenada al origen y graficar.*

*Si la respuesta es negativa, justificar.*

*ii) Idem i) para la ecuación $x^2 + 2y - 1 = 0$*

*iii) Idem i) para la ecuación $x - y = 0$*

*f)*

*i) Hallar tres pares de números que sean solución de cada una de las ecuaciones de i) y iii) del ejercicio anterior.*

*ii) ¿Cuántas soluciones tiene cada una de esas ecuaciones?*

*iii) Observar la gráfica de las funciones i) y iii) del ejercicio anterior e indicar las coordenadas de tres puntos que pertenezcan a cada una de ellas.*

**(18)**

*Paralelismo y perpendicularidad entre rectas*

Que dos rectas sean paralelas significa que tienen la misma inclinación respecto de los ejes coordenados. Por eso la definición es:

*Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.*

Que dos rectas sean perpendiculares significa que el ángulo que forman entre ellas es un ángulo recto. En términos de las pendientes definimos así.

*Dos rectas son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es -1.*

Con estas definiciones podemos ahora decidir si dos rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos cosas.

Ejercicios:

1) Indicar si las rectas que representan los siguientes pares de funciones lineales son paralelas o secantes. En caso de ser secantes indicar si son perpendiculares:

*a)* $2x + 3y - 5 = 0, \quad y = \frac{-2}{3}x + 7$

*b)* $2x + 3y - 5 = 0, \quad 3x - 2y = 1$

*c)* $2x + y - 5 = 0, \quad y = -2x + 5$

2) Escribir la ecuación de la recta paralela a $x+y-1=0$ que pasa por el punto (-1,1).

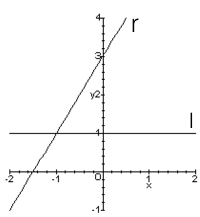
3) Dar la ecuación de la recta perpendicular a $y-2x=5$ cuya ordenada al origen es -1.

**(19)**

*Ecuaciones de Primer Grado con una incógnita*

Vamos a recordar lo ya visto en los capítulos 1 y 2, pero además trataremos de dar una interpretación geométrica de las soluciones.

Representemos gráficamente la función $y=2x+3$ y llamemos r a la recta resultante.




Llamemos **a** al punto donde la recta **r** corta al eje de abscisas. Indentifica ese punto en el dibujo de la recta **r**. ¿Qué coordenadas tiene?

La sola observación del gráfico nos dice que **a** es un punto de ordenada nula, es decir (x,0). Como el punto está en **r** podemos decir que es el punto para el cual $y = 0$ y escribimos

$$2x + 3 = 0$$

Si resolvemos esta ecuación

$$2x = -3 \qquad\qquad x = -3/2$$

El valor $x = -1,5$ es la abscisa del punto donde la recta **r** corta el eje x.

Llamemos **b** al punto de intersección de la recta **r** y la horizontal a la cual llamaremos **l**, esto es:

$$\{b\} = r \cap l$$

Podemos decir entonces que **b** es el punto para el cual la ordenada vale **1**, es decir $y = 1$. ¿Cuánto vale la abscisa del punto **b**?

Si nos independizamos de la representación gráfica, podemos plantear y resolver la ecuación analíticamente.

Decir que **b** es el punto de **r** en el que $y = 1$ nos origina la ecuación

$2x + 3 = 1$

y ahora resolvemos $2x = -2$ , $x = -1$

La solución es la abscisa del punto **b**; es decir el punto donde la recta **r** corta a la recta horizontal $y = 1$ tiene como coordenadas $(-1, 1)$.

Enunciemos la conclusión general

> Dada una recta **r** de ecuación $y = ax + b$, para hallar la abscisa del punto en que la misma corta a la recta $y=k$, resolvemos la ecuación de primer grado $ax + b = k$.

Ejercicios

*a) Representar la función lineal* $y = \frac{3}{2}x + 1$

*Hallar gráfica y analíticamente la abscisa del punto para el cual*

*i)* $y = 0$

*ii)* $y = 1$

*iii)* $y = \frac{1}{2}$

*iv)* $y = 3/2$

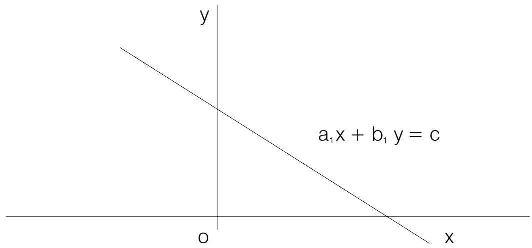
*v)* $y = 10$

*b) Idem para la función lineal* $y = -x$

**(20)**

## Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Incógnitas

Ya vimos que una ecuación $a_1x + b_1 y = c_1$ ❶ define una función lineal. Existen **infinitos** pares (x, y) que **verifican** esta ecuación. Son precisamente los pares de coordenadas que corresponden a los infinitos puntos que pertenecen a la recta que dicha ecuación define.




Es decir, se pueden determinar infinitos pares (x, y) que verifican la ecuación ❶. Esto significa que dicha ecuación **tiene infinitas soluciones.**

Si consideramos otra ecuación $a_2x + b_2y = c_2$ ❷ también tendrá infinitas soluciones que corresponden a los infinitos puntos que pertenecen a la recta que ella representa. Podemos preguntarnos ahora:

¿Hay algún punto que pertenezca a ambas rectas?

ó

¿Hay algún par ordenado (x, y) que sea solución de ambas ecuaciones?

Vamos a dedicarnos a responder estos interrogantes pero previamente formalicemos un poco los conceptos.

Un sistema de dos ecuaciones de 1er. grado con dos incógnitas es una expresión como la siguiente:

$$\begin{cases} a_1x + b_1 \ y = c_1 \\ a_2x + b_2 \ y = c_2 \end{cases}$$

También se dice que es un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.**

Una solución del sistema es un par (x, y) de números reales que verifica ambas ecuaciones del sistema.

Veamos un ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 6x + 9y = 12 \end{cases}$$

Es un sistema.

2x + 3y = 4 tiene infinitas soluciones. Algunas de ellas son:
(-1,2): (0, 4/3); (-4, 4); (-3/2, 7/3); . . .

6x + 9y = 12 también tiene infinitas soluciones, entre ellas:
(- 1/6, 13/9); (-4, 4); (4, - 4/3); . . .

Observamos que (-4, 4) es solución de ambas ecuaciones, por lo tanto **es solución del sistema.**

*Analizar y discutir la veracidad de la siguiente afirmación "(-4, 4) no es la única solución del sistema dado".*
*Si es falsa, justificar la respuesta.*
*Si es verdadera, encontrar por lo menos otro par que sea solución.*

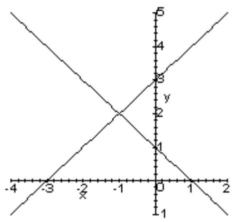
Cuando resolvimos ecuaciones de 1er. grado con una incógnita, vimos que éstas siempre tienen solución. En los sistemas de ecuaciones y en otras ecuaciones que veremos en el futuro, esto no es siempre cierto. Un sistema puede tener:

- Una única solución
- Infinitas soluciones
- Ninguna solución

Para ver mejor el problema recurriremos a la representación geométrica de las funciones. Analicemos tres ejemplos:

1) Sea el sistema $\begin{cases} y - x = 3 \\ y + x = 1 \end{cases}$

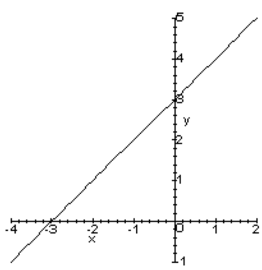
Cada ecuación origina una función lineal. Ellas son $y = x + 3$ e $y = -x + 1$, cuya intersección es el punto (-1, 2)




rectas secantes

El punto (-1, 2) pertenece a ambas rectas; luego ese par es solución de cada una de las ecuaciones del sistema y por lo tanto **es solución del sistema**. Además es la **única solución.**

2) En el sistema $\begin{cases} y - x = 3 \\ 2y - 2x = 6 \end{cases}$ , la representación gráfica es




ambas rectas coinciden

Las dos ecuaciones determinan la misma recta o más precisamente son rectas coincidentes. Por lo tanto los puntos que pertenecen a una de ellas, pertenecen también a la otra. Esto dice que las infinitas soluciones de una de las ecuaciones son precisamente las infinitas soluciones de la otra. Como conclusión el sistema tiene **infinitas soluciones.**

3) Para el sistema $\begin{cases} y - x = 3 \\ 2y - 2x = 5 \end{cases}$,

*Dibujar las dos rectas. ¿Cuál es la conclusión?*

**(21)**

Las rectas son paralelas, es decir, no tienen ningún punto en común. Esto significa entonces que el sistema carece de solución. ¿Cómo detectamos analíticamente estas situaciones geométricas?

Para ello necesitamos resolver sistema de ecuaciones, tema que se estudia en el polimodal. En ese momento estudiaron cuatro métodos que se llaman: a) sustitución, b) reducción por suma y resta, c) igualación y d) determinantes. Sería conveniente repasar estos métodos, sobre todo los tres primeros. Pueden encontrarlos en cualquier libro del ciclo.

Pero queremos advertir que como métodos no nos parece conveniente distinguirlos, pues en la práctica uno puede mezclarlos y en el fondo son la misma cosa.

Resolvamos los tres ejemplos propuestos

1) $\begin{cases} y - x = 3 \\ y + x = 1 \end{cases}$ ,

Despejamos y de la 1ra. y **sustituimos** en la 2da.

$$y = 3 + x$$
$$(3 + x) + x = 1$$
$$2x = 1 - 3$$
$$2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

Hallamos el valor de y en la primera ecuación del sistema:

$$y = 3 - 1 = 2$$

La **única** solución del sistema es (-1, 2). Esto coincide con lo que ya dijimos. Se dice que el sistema es **compatible determinado.**

2) $\begin{cases} y - x = 3 \\ 2y - 2x = 6 \end{cases}$ ,

A la 2da, le restamos la 1ra. multiplicada por dos.

$$2y - 2x = 6$$
$$\underline{2y - 2x = 6}$$
$$0y - 0x = 0 \qquad\qquad 0x = 0y \quad \text{o sea} \quad 0=0$$

El resultado obtenido es una igualdad que se satisface independientemente de los valores que tomen x e y. Esto significa que el sistema admite infinitas soluciones. Decimos, entonces, que es un sistema **compatible indeterminado.**

3) $\begin{cases} y - x = 3 \\ 2y - 2x = 5 \end{cases}$

Despejemos y de ambas ecuaciones e igualemos

$y = 3 + x$

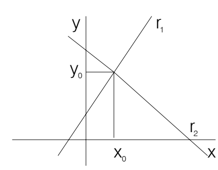
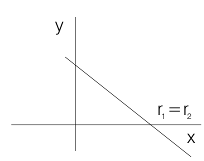
$2y = 5 + 2x \Rightarrow y = 5/2 + x$

$3 + x = 5/2 + x$

$3 = 5/2$ absurdo

El resultado es absurdo, cualesquiera sean los valores que tomen x e y. Esto significa que el sistema carece de solución y se dice que es un sistema **incompatible.**

Es conveniente realizar, en este momento, una síntesis. La haremos en un cuadro que deberán completar.

| Clasificación del sistema | Cantidad de soluciones | Posiciones de las rectas | Gráfico |
|---|---|---|---|
| Compatible determinado | a) | Secantes |   |
| b) | c) | Coincidentes |   |
| Incompatible | Ninguna | d) | e) |

**(22)**

Resolvamos algunos problemas relacionados con sistemas.

1) Buscar la función lineal que pasa por los puntos (4, 1) y (0, -1)

Solución:

Buscamos una función lineal, es decir una función de la forma y = mx + h de la cual no conocemos **m y h.** Usando los datos podemos escribir:

$$\left.\begin{array}{r} 1 = m.4 + h \\ -1 = m.0 + h \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 4m + h = 1 \\ h = -1 \end{cases}$$

*Resolver el sistema y escribir la respuesta*

**(23)**

2) En un comercio "A" un frasco de champú cuesta las 3/4 partes de lo que vale en un comercio "B" y un frasco de crema de enjuague cuesta el 50% más. Una persona compra tres frascos de champú y dos frascos de crema de enjuague en el comercio "A" y paga \$18. Si hubiera comprado en "B" habría gastado lo mismo. ¿Cuánto cuesta el champú y la crema de enjuague en el comercio "B"?

Solución:

Los siguientes pasos sirven de guía para su resolución.

*a) Elegir letras para indicar el precio de cada artículo en el comercio "B".*

*b) De acuerdo a esto y según lo que indica el enunciado ¿cómo podemos expresar el precio de cada artículo en el comercio "A"?*

*c) Escribir las ecuaciones que expresen lo gastado en "A" y lo que habría gastado en "B".*

*Este es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolverlo y escribir la respuesta del problema.*

**(24)**

*Dejamos más ejercicios.*

*a) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones. Graficar las rectas y verificar la solución.*

*i)* $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -\dfrac{9}{5}x + 12 \end{cases}$

*ii)* $\begin{cases} y - x + 2 = 0 \\ y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3} \end{cases}$

*iii)* $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ x-5y=2 \end{cases}$

*iv)* $\begin{cases} 2y-x=5 \\ -6y+3x=-5 \end{cases}$

*v)* $\begin{cases} 4x-2y+6=0 \\ 2x-y+3=0 \end{cases}$

*vi)* $\begin{cases} 4x+7y=3 \\ \quad 2x=1 \end{cases}$

*b) Hallar la función lineal cuyo gráfico pasa por los puntos (2, 1) y (3, 6). Representar gráficamente.*

*c) Dadas las rectas $r_1$ y $r_2$, determinar si son paralelas o secantes.*

*i)* $r_1: \ y = 3x - 1$ $\quad r_2$ *contiene a los puntos (1, 1) y (2, -2)*

*ii)* $r_1: y + x - 2 = 0$ $\quad r_2$ *contiene a los puntos (0, 0) y ( 1, -1).*

**(25)**

*Inecuaciones de Primer Grado*

Las relaciones numéricas que se expresan con los signos de > y < se llaman desigualdades y las relaciones algebraicas correspondientes se denominan inecuaciones.

Las inecuaciones lineales juegan un papel fundamental en lo que se llama programación lineal, por ello introducimos esta noción con el siguiente ejemplo sencillo:

Una empresa productora de comida para vacas lecheras produce dos tipos de alimentos: Normal y Extra. Por simplicidad, consideraremos a cada tipo de alimento formado sólo por dos componentes. Un kg. de Normal consta de igual peso de grano de sorgo que de heno de alfalfa molido. Un kg. de Extra consta de 1/3 de grano de sorgo y 2/3 de heno de alfalfa molido. Supongamos que la empresa tiene un stock de 3 toneladas de grano de sorgo y 4 toneladas de heno de alfalfa.

Nuestro deseo es encontrar el conjunto de todas las posibles combinaciones de Normal y Extra que pueden producirse con el stock disponible.

Solución:

Si llamamos x: cantidad de toneladas de Normal.

y: cantidad de toneladas de Extra.

Puesto que no puede producirse una cantidad negativa tenemos la hipótesis.

$$x \geq 0 \quad (1)$$
$$y \geq 0 \quad (2)$$

Las cantidades limitadas de sorgo y alfalfa imponen una restricción a la cantidad de alimento que se puede producir. Si se producen x toneladas de Normal se necesitan (1/2 x) toneladas de sorgo; si se producen y toneladas de Extra se necesitan (1/3 y) toneladas de sorgo. Puesto que se dispone de 3 toneladas de sorgo tenemos que:

$$1/2\, x + 1/3\, y \leq 3 \qquad (3)$$

Análogamente necesitamos $\frac{1}{2}x + 2/3\, y$ toneladas de alfalfa para producir x e y toneladas de Normal y Extra respectivamente. Puesto que se dispone de 4 toneladas, resulta:

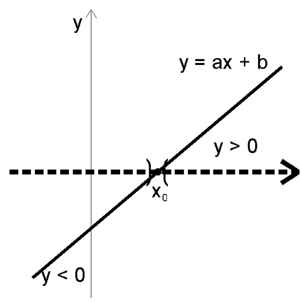
$$1/2\, x + 2/3\, y \leq 4 \qquad (4)$$

Entonces, encontrar el conjunto de todas las posibles combinaciones de Normal y Extra que pueden producirse con dicho stock disponible, es encontrar todos los pares ( x, y ) que satisfacen simultáneamente las cuatro inecuaciones planteadas, es decir debemos hallar la solución del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \quad (1)\\ y &\geq 0 \quad (2)\\ 1/2\, x + 1/3\, y &\leq 3 \quad (3)\\ 1/2\, x + 2/3\, y &\leq 4 \quad (4) \end{aligned}$$

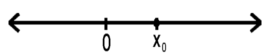
Como sólo resolvimos algunas inecuaciones en $\Re$ afiancemos primero este tema y después volvamos sobre el problema.

*Inecuaciones de Primer Grado con una Incógnita*

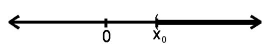



**¿Para qué valores de x resulta:**

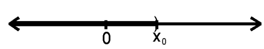
- $y = 0$? Para $x = x_0$




*$y > 0$?* Para $x > x_0$




*$y < 0$?* Para $x < x_0$




Sugerimos resolver de la misma manera los siguientes ejercicios:

*a) La función $y = (3/2)\,x + 1$.*
*¿Para qué valores de x resulta:*

*i)* $y > 0$?
*ii)* $y < 0$?
*iii)* $y = 0$?

*Representar en la recta real las soluciones.*
*b) En $y = -x$, ¿para qué valores de x resulta:*

*i)* $y > 0$?
*ii)* $y < 0$?
*iii)* $y = 0$?

*Representar en la recta real las soluciones.*

**(26)**

En el párrafo anterior mostramos cómo resolver algunas inecuaciones lineales con una incógnita en forma geométrica. Ahora resolveremos inecuaciones lineales con una incógnita en forma analítica.

Ejemplo 1

Hallemos los valores de x tales que

$$3x - 4 < 5$$

Pasemos el 4 al otro miembro

$$3x < 5 + 4$$

$$3x < 9$$

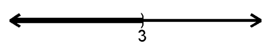
Pasamos el 3 dividiendo

$$x < 3$$

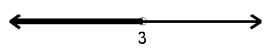
La solución de la inecuación es el conjunto de todos los números reales menores que 3. Lo escribiremos así:

$$S = \{ x \in \Re \,/\, x < 3 \}$$

Lo graficaremos así:




o así:




Ejemplo 2

Encontremos los valores de x tales que

$$7 - 5x \leq 17$$

Pasamos el 7 restando

$$-5x \leq 17 - 7$$

$$-5x \leq 10$$

Pasamos el – 5 dividiendo teniendo en cuenta que es un valor negativo y por lo tanto la desigualdad cambia de sentido:

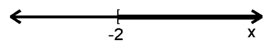
$$x \geq \frac{10}{-5}$$

$$x \geq -2$$

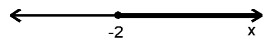
La solución es

$$S = \{x \in \Re \ / \ x \geq -2\}$$

y lo graficamos así




o así:



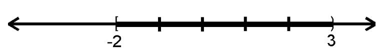

También podemos pensar en resolver un sistema de inecuaciones lineales con una incógnita. Por ejemplo, la solución del sistema formado por las dos inecuaciones anteriores:

$$\begin{cases} 3x - 4 \leq 5 \\ 7 - 5x \leq 17 \end{cases}$$

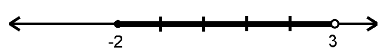
es el conjunto de los valores de x que satisfacen las dos **desigualdades.**

El conjunto solución es $\{ x \in \Re \ / \ x < 3 \ \text{ y } x \geq -2\}$ o en forma equivalente empleando doble desigualdad $\{ x \in \Re \ / \ -2 \leq x < 3\}$

Lo representamos así:




o así:




Otra forma de representar simbólicamente el conjunto solución de las inecuaciones anteriores es a través de intervalos.

La solución del ejemplo 1 se puede escribir así: $(-\infty, 3)$; la del ejemplo 2 así: $[-2, \infty)$ y la del sistema así: $[-2, 3)$.

Ejercicios

Resolver los ejercicios siguientes para afianzar lo que se estudió.

*a) Encontrar las soluciones a las siguientes inecuaciones y representar en la recta. Escribir las soluciones como intervalos.*

*i)* $2x - 3 < 6$

*ii)* $-3x + 4 \leq 10$

*iii)* $2x - 1 \leq 3$

*b) Encontrar las soluciones de los siguientes sistemas y representar sobre la recta. Escribir las soluciones como intervalos*

*i)* $\begin{cases} 1/2x - 3 < 3/2 \\ 4x + 2 \geq 1 \end{cases}$

*ii)* $\begin{cases} 2x + 1 \geq -3 \\ -x + 3 \geq 5 \end{cases}$

*iii)* $\begin{cases} 2x + 3 < 4 \\ x - 1 \geq 5 \end{cases}$

*c)*
*i) ¿Cuántas soluciones tiene una inecuación lineal con una incógnita?*
*ii) ¿Cuántas soluciones tiene un sistema de inecuaciones lineales con una incógnita?*

**(27)**

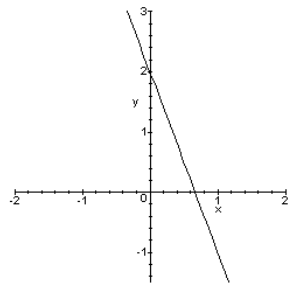
*Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas*

Este tipo de inecuaciones vamos a resolverlas en forma geométrica y, tal como lo anterior, se hará a través de ejemplos. Antes de empezar digamos que a estas inecuaciones se las puede llamar también inecuaciones lineales.

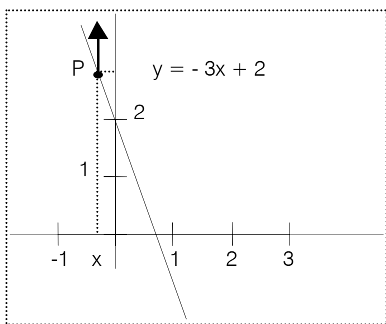
Ejemplo 1: queremos encontrar los pares (x, y) tales que $3x + y > 2$.
Podemos escribir:

$$y > -3x + 2$$

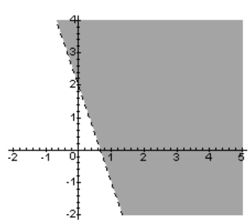
Sabemos cuáles son los pares (x, y) que satisfacen la igualdad $y = -3x + 2$, además sabemos representarlo gráficamente. Hagámoslo:




Para un x cualquiera el punto P de coordenadas (x,y) que está sobre la recta es tal que $y = -3x + 2$. Entonces para ese mismo x, un punto (x,y) para el que $y > -3x + 2$, debe estar arriba de P.




Esto mismo lo pensamos para todos los valores de x y tenemos la solución. La dibujamos así:



La solución es un conjunto de puntos del plano, más específicamente el semiplano que consta de todos los puntos por encima de la recta frontera $y = -3x + 2$ .

Como en este caso no incluye los puntos de la recta se llama semiplano abierto, en caso contrario se denomina **semiplano cerrado.**

*Representar gráficamente la solución de las siguientes inecuaciones:*

a) $x - y < 1$ b) $x - y \geq 1$

**(28)**

*¿Cuál será ahora la solución de un sistema de inecuaciones lineales? Tomemos como desafío hallar la solución del sistema*

$$\begin{cases} y > -3x + 2 \\ x - y < 1 \end{cases}$$

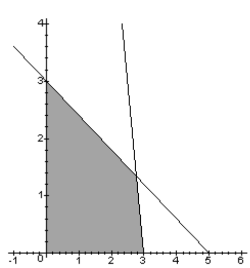
Para ello debemos dibujar en un mismo sistema de ejes y con diferente rayado las soluciones de cada una de las inecuaciones. La solución del sistema es la parte cuadriculada o doblemente rayada.

**(29)**

Resolvamos ahora el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 5y \leq 15 \\ 6x + y \leq 18 \end{cases}$$

Si hacemos la representación con mucho cuidado podemos ver que la respuesta es el polígono que dibujamos a continuación.




En efecto, un punto de coordenadas ( x, y ) es solución del sistema si y sólo si satisface todas las desigualdades simultáneamente. El conjunto solución del sistema deberá ser pues la intersección de los cuatro semiplanos cerrados.

Para afianzar lo anterior proponemos resolver los siguientes ejercicios:

*a) Representar en el plano las soluciones de las siguientes inecuaciones.*

*i)* $y + 2x < 2$ *ii)* $2y - 3x \geq -2$ *iii)* $4y - x \leq 8$

*b) Representar en el plano las soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones lineales:*

*i)* $\begin{cases} 2x + y < 2 \\ x - y < 3 \end{cases}$ *ii)* $\begin{cases} 2y - 3x \geq -2 \\ y + 2x > 1 \end{cases}$ *iii)* $\begin{cases} 4y - x \leq 8 \\ 2y + 4x \geq 1 \end{cases}$

*iv)* $\begin{cases} 4y - x \leq 8 \\ 4y - x > 4 \end{cases}$ *v)* $\begin{cases} 4y - x \geq 8 \\ 4y - x < 4 \end{cases}$ *vi)* $\begin{cases} -2x + 6y \leq 2 \\ x - y \leq 2 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

**(30)**

Ahora estamos en condiciones de resolver el problema planteado al comienzo del tema.

*Representar el conjunto solución.*

**(31)**

Proponemos el siguiente problema para resolver completamente.

*Un laboratorio produce dos tipos de medicamentos que entrega en comprimidos de 1 gr. en dos variedades: A y B. Cada caja de A y de B contienen 15 comprimidos.*

*Cada comprimido correspondiente a la variedad A contiene 10 mg. de la monodroga I, 40 mg. de la droga II y 50 mg. de la droga III.*

*Cada comprimido correspondiente a la variedad B contiene 40 mg. de la droga I, 40 mg. de la droga II y 20 mg. de la droga III.*

*El stock de drogas I, II y III con que cuenta el laboratorio es respectivamente 5,4 kg; 6 kg. y 6 kg.*

*Encontrar el conjunto de todas las posibles combinaciones de cajas A y B que pueden producirse con dicho stock disponible.*

**(32)**

*Aplicaciones de la Función Lineal*

- Proporcionalidad Directa

  "Los príncipes de los estados helenísticos, que pueden considerarse como potencias en el sentido moderno y estaban bien dotados de ingentes recursos, emprendieron la construcción de grandes obras públicas y dispensaron una amplia protección a las artes y las ciencias. Tal protección fue singularmente importante en el caso de las ciencias, pues permitió no sólo ofrecer a los hombres de ciencia las condiciones de seguridad y bienestar que facilitaran su dedicación exclusiva a la investigación y a la enseñanza, sino que permitió la adquisición de los materiales e instrumental necesarios para los estudios científicos. Modelo de esta corte de mecenas fue la de los Ptolomeos de Egipto, que convirtieron el gran puerto comercial de Alejandría en el centro científico más importante del mundo griego y también el más duradero.

  A este ambiente científico se vinculan las tres figuras máximas de la matemática antigua: EUCLIDES, ARQUIMEDES y APOLONIO, cuyo brillo justifica por sí solo que este período se considere como "Edad de Oro" de la matemática griega.

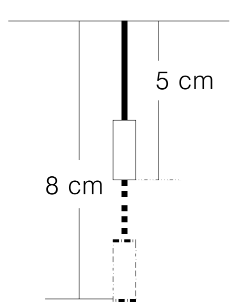
  Casi nada se sabe de Euclides, hay noticias que fue un sabio que floreció hacia el año 300 A.C. y que publicó numerosas obras científicas destacándose entre ellas los célebres Elementos.

  Los tres libros de esta obra, dedicados a la aritmética tratan de la teoría elemental de la divisibilidad, de la descomposición en factores primos, de las proporciones y progresiones geométricas".

*Historia de la Matemática*
J. Rey Pastor – J. Babini

Trataremos de resolver el siguiente problema:

Si una pesa de 2 kg estira un resorte 5 cm. ¿Cuál es el peso que lo estirará 8 cm? Se supone que la elongación es directamente proporcional al peso.



Método 1: por proporciones

5 cm ———————————— 2 kg
8 cm ———————————— x

$$\frac{5cm}{8cm} = \frac{2kg}{x}, \quad x = \frac{8cm.2kg}{5cm} = 3{,}2kg$$

Método 2: por regla de tres

5 cm ———————————— 2 kg
8 cm ———————————— x

$$x = \frac{8cm.2kg}{5cm} = 3{,}2kg$$

Esto en realidad es lo mismo que hicimos en el primer método. Proponemos un tercer método:

La razón $\frac{2}{5}$ es igual a la razón $\frac{3{,}2}{8}$ ya que ambas dan 0,4. Entonces podemos escribir $\frac{2}{5} = \frac{3{,}2}{8}$

Si se mantiene la proporcionalidad entre la elongación y el peso, y queremos saber el peso que lo elongará 4 cm escribimos: $\frac{2}{5} = \frac{3{,}2}{8} = \frac{peso}{4}$

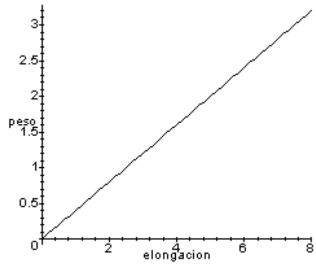
Hagamos una tabla

| **Peso** | **Elongación** | **Razón** |
|---|---|---|
| 2 | 5 | 0,4 |
| 3,2 | 8 | 0,4 |
| 1,6 | 4 | |
| | 2,5 | |
| | 6 | |
| 3 | | |

*Completar lo que falta*

**(33)**

Podemos volcar estos datos en un gráfico




Observación:

Tenemos entonces que, si **y** representa el peso y **x** la elongación, la razón **y/x** es constante y podemos escribir: **y/x = k** , o lo que es lo mismo **y = kx.**

Esto no es más que una función lineal homogénea y **k**, pendiente de la recta, es la constante de proporcionalidad que depende del resorte. En este ejemplo la constante es 0,4 y la función lineal resultante $y = 0{,}4\,x$.

El tema proporcionalidad también es muy usado en el arte. Así lo podemos notar al leer el siguiente trozo del libro “Cómo ver un cuadro” del crítico de arte Córdoba Iturbún, referido al cuadro “La Virgen de las Rocas”.

> Ahora bien, una armonía y un equilibrio cromáticos como el de este cuadro no se alcanzan por los caminos del azar. Son la consecuencia de un equilibrio perfecto de valores y de tonos, de extensiones de las manchas de color y de compensaciones colorísticas tan exactamente dosificadas que podrían reducirse, incluso, a cifras matemáticas. La ley del número, la ley de la proporcionalidad matemática que rige al Universo, como lo afirmaron Platón, Aristóteles y Pitágoras, domina también el mundo delicado de las relaciones colorísticas.

Más adelante dice:

> Cuando se mira un cuadro de *Jackson Pollock,* uno de los maestros americanos del movimiento informalista, no es posible dejar de advertir, en el aparente desorden de su multiplicidad innumerable de elementos, líneas, formas, color, chorreaduras, salpicaduras, grafías serpenteantes, raspados, grumos, la presencia de un ritmo y un sistema de proporcionalidades que todo lo gobiernan en ese mundo tan intrincado como el de una selva. Esas proporcionalidades y ese ritmo constituyen sin duda, las causas fundamentales de la sugestión poética que fluye de la obra.

*Proponemos responder lo siguiente:*

*a) ¿Cuál podría ser una fórmula que represente la ley de proporcionalidad matemática? Formularla para la extensión de las manchas de color.*

*b) ¿Cuál es la causa fundamental de la sugestión poética del cuadro de Pollock?*

**(34)**

Resolvamos otro problema:

18 gr. de ácido clorhídrico ( ClH ) metabolizan 20 gr de hidróxido de sodio (NaOH). ¿Cuántos gramos de hidróxido de sodio se metabolizan con 1,080 gr. de ácido clorhídrico? Lo mismo para 10 gr de ClH. Lo mismo para 270 gr de ClH.

Solución:

18 gr ClH____________________ 20 gr NaOH

1,08 gr ClH_____________________ y

Si usamos la función lineal tenemos:

$y = \frac{20}{18}x$ $\quad$ *o sea* $y = \frac{10}{9}x$

Si x = 1,08gr. $\quad y = \frac{10}{9}.1{,}08gr = 1{,}2gr$

Si x = 10gr. $\quad y = \frac{10}{9}.10gr \cong 11{,}1gr$

Si x = 270 gr. $\quad y = \frac{10}{9}.270gr = 300gr$

¿No es más práctico así?

- Porcentaje

En todos los diarios, revistas, ofertas, problemas científicos, económicos, laborales, nos invaden los porcentajes. Así por ejemplo hemos oído “Compre hoy al 50% de su valor real”.

*La manera más común de calcularlo es usando la regla de tres pues hay proporcionalidad y, además, es directa. ¿Por qué?*

**(35)**

Veamos cómo planteamos el problema anterior.

Si queremos comprar un artículo cuyo precio es $ 523. ¿Cuánto debemos pagar realmente teniendo en cuenta la oferta del comerciante?

100____________________ 50
523____________________ y

sabemos que $\frac{50}{100} = \frac{y}{523}$ y por lo tanto la constante de proporcionalidad es 0,5.

La función lineal que nos queda y = 0,5. x

Conclusión: La función lineal homogénea y = kx es aplicable al cálculo de porcentajes. La constante de proporcionalidad k es $\frac{p}{100}$ donde *p* es el porcentaje a calcular.

Así por ejemplo:

y = 0,5 x nos permite calcular los porcentajes de 50%

*Completar lo siguiente:*

y = 0,12 x nos permite calcular los porcentajes de ..........

y = 0,01 x nos permite calcular los porcentajes de ...........

y = ......... nos permite calcular los porcentajes de 45%

y = .......... nos permite calcular los porcentajes de 2,3%

*a) En el ejemplo que vimos ¿cuál es el descuento en el artículo de $ 523?*

*b) Si la bonificación es del 12%:*

*i) ¿Cuál es el descuento en un artículo de $ 746?*

*ii) ¿Cuánto debe pagar por un artículo cuyo precio es $ 178?*

*iii) Si pagó $ 89 por un artículo ¿cuál es su precio?*

**(36)**

Apliquemos este tema a otro ejemplo. El siguiente trozo fue extraído de un editorial del diario “El Litoral” del día 15 de mayo de 1991:

**Hace cien años la Iglesia inauguraba su Doctrina Social**

La radiografía del cuerpo doliente de América que ellos han hecho, desnuda sus enfermedades, la pobreza, el narcotráfico, la corrupción administrativa, las sectas, la economía neoliberal y la deuda externa. Sobre este último particular, los prelados brasileños fueron más lejos aún. El último documento emitido en San Pablo exige al gobierno de Collor de Mello no pagar la deuda externa, que asciende a alrededor de 120.000 millones de dólares y la convierten en la más elevada de los países subdesarrollados.

“Vamos a dejar bien en claro que la deuda ya fue pagada varias veces” enfatizó uno de los prelados. La declaración episcopal constituye un dramático testimonio elaborado sobre la base de la propia alarmante realidad y de un informe del Banco Mundial. Este organismo, que no puede ser sospechado ideológicamente, da cuenta deque entre 1981 y 1987, diez millones de brasileños pasaron de la pobreza a la miseria; que en los últimos diez años empobreció el 90 % de la población, y que la cuarta parte de los habitantes (unos 32 millones) son miserables que se debaten por la supervivencia con un promedio de un dólar por día. El mismo Banco Mundial ha llegado a la conclusión que para los países subdesarrollados cumplir con sus deudas significa “enviar millones de personas a la miseria”. Por ello la Iglesia – mater et magistra – desde la finisecular “Rerum Novarum” ha venido alzando su voz y haciendo escuchar la verdad.

*Responder las siguientes preguntas, siempre analizando el texto y empleando la función* $y = kx$

*a) Si la cuarta parte de la población brasileña está constituida por miserables que se debaten por la supervivencia ¿Cuál es la población total de Brasil?*
*b) ¿Qué porcentaje de brasileños se empobreció en los últimos 10 años?*
*c) ¿Qué número de habitantes representa?*
*d) ¿Cuántos brasileños pasaron de la pobreza a la miseria entre 1981 y 1987?*
*e) ¿Qué porcentaje del total de la población representa?*
*f) ¿Qué porcentaje del total de “miserables” representan los que pasaron de la pobreza a la miseria entre 1981 y 1987?*

**(37)**

### ¿Qué fue hasta aquí lo esencial?

Función **homogénea** de 1er. grado es la función definida por $y = mx$.
Su representación gráfica es una recta que pasa por el origen.

**Teorema**: la función cuyo gráfico es una recta que pasa por el origen de coordenadas es una función homogénea de 1er. grado.

**Pendiente de una recta:** m es la pendiente de la recta $y = mx$.

Función lineal no homogénea de 1er. grado o función afín es la función $y = m x + h$.

La representación gráfica de $y = mx + h$ es una recta de pendiente m que pasa por $(0, h)$. h se llama la **ordenada al origen**.
Las ecuaciones de 1er. grado con una incógnita tienen solución única.

Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas viene dado por:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Los sistemas lineales con dos incógnitas se clasifican en:

- **compatible determinado:** tienen una única solución (dos rectas que se cortan)
- **compatible indeterminado**: tiene infinitas soluciones (dos rectas coincidentes)
- **incompatible**: no tiene solución (dos rectas paralelas)

Las inecuaciones de 1er. grado con una incógnita vienen dadas por:

$$ax + b \leq c \quad \text{o} \quad ax + b < c \quad \text{o}$$
$$ax + b \geq c \quad \text{o} \quad ax + b > c \quad \text{o}$$
$$ax + b \neq c$$

La solución de una inecuación lineal con una incógnita es un conjunto de puntos de la recta.
La solución de un sistema de inecuaciones con una incógnita puede ser un punto, infinitos puntos o el conjunto vacío.
Inecuación de 1er. grado con dos incógnitas: la solución es un semiplano abierto o cerrado.
Sistemas de inecuaciones de 1er. grado con dos incógnitas: la solución es la intersección de semiplanos, entonces puede ser vacío o un subconjunto del plano.

## Problemas y aplicaciones

**1-** *Sea f (x ) la función definida como sigue: f ( x ) es el importe en pesos del franqueo necesario para enviar una carta cuyo peso es x gramos.*

*a) ¿Cuál es el dominio y la imagen de f?*

*b) ¿Cuál es la ley?*

*c) Construir una gráfica de f ( x )*

**2-** *Sea g la función definida como sigue: g ( x ) es la edad en años de una persona cuya edad es x meses.*

*a) ¿Cuál es el dominio de g? ¿Y el conjunto imagen?*

*b) Construir una gráfica.*

**3-** *Indicar la pendiente y la ordenada al origen de cada una de las siguientes rectas. Graficar cada recta:*

a) $5x - y + 3 = 0$

b) $5x + 3y + 2 = 0$

c) $y - \sqrt{5} = 0$

**4-** *i) Escribir las ecuaciones de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos y graficar:*

*a) (-1 , -1) y (2 , 1)* *b) (-1 , 2) y (½ , -2)* *c) (0 , 2) y (2 , 2)*

ii) Escribir las ecuaciones de las siguientes rectas:

a) tiene pendiente $-\frac{1}{2}$ y contiene al punto (-2, 4).

b) tiene pendiente 3 y ordenada al origen – 4.

c) Contiene al punto (-1,4) y su ordenada al rigen es 6.

d) es paralela a $y = 3x - 1$ y corta al eje x en el punto (2, 0).

e) es perpendicular a la recta $2x - 5y + 1 = 0$ y contiene al punto (-1, 1).

*iii) Determine la pendiente y la ordenada al origen de las siguientes rectas:*

*a)* $y = -x + 1$; *b)* $-2x = 3y + 6$; *c)* $5x + 15y - 30 = 0$

*iv) Encuentre tres puntos en cada una de las siguientes rectas del inciso iii):*

**5-** *Dos de las escalas de temperaturas más utilizadas son la Celsius y la Farenheit. La temperatura de congelación del agua destilada en la escala Celsius es 0° C y en la escala Farenheit es de 32° F. En cambio el agua hierve a 100° C en la escala Celsius y a 212° F en la escala Farenheit.*

*a- ¿Qué relación se puede establecer entre ambas escalas?*

*b- ¿A qué tipo de función responde si la variable independiente fuese la temperatura Centígrada y la dependiente la temperatura Farenheit?*

*c- Graficarla*

*d- ¿Puede ser, para una cierta temperatura, que la lectura sea la misma en un termómetro Celsius y en uno Farenheit?*

**6-** *La ley de Hooke (más conocida como ley del resorte) establece la relación que existe entre la fuerza F aplicada a un resorte y el estiramiento l producido en éste. La siguiente tabla de valores responde a dicha ley para un resorte determinado:*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *F ( dyn)* | 10 | 15 | 20 | 45 | 50 |
| *l (cm)* | 2 | 3 | 4 | 9 | 10 |

*a) Con los datos de la tabla construir la gráfica.*

*b) Del gráfico obtener las fuerzas correspondientes a:*

$l_1$= 5 cm; $l_2$= 3,3 cm: $l_3$=8 cm.

*c) Obtener los estiramientos para* $F_1$= 30 dyn; $F_2$= 5 dyn; $F_3$= 55 dyn

*d) ¿Puede enunciar la ley?*

**7-** *Un hombre tiene 30 años y su hijo 2. Averiguar dentro de cuántos años la edad del padre será el doble que la del hijo.*

**8-** *En una función de cine los menores pagan la mitad que los adultos. Si se vendieron 100 entradas y se recaudaron $340 ¿cuánto cuesta la entrada de un menor y cuánto la de un mayor, sabiendo que el 70% de los espectadores son adultos?*

**9-** *Luego de 17 partidos sin perder, un equipo de fútbol ha reunido 27 puntos ¿Cuántas veces ganó y cuántas empató?*

**10-** *Se tienen 10 g de* $CO_3Na_2$ *(carbonato de sodio). El porcentaje de carbono (C) en la masa es 11,32% y la masa de oxígeno (O) es 4,53 g. Calcular la masa de sodio presente en los 10 g. ¿Qué porcentaje representa?*

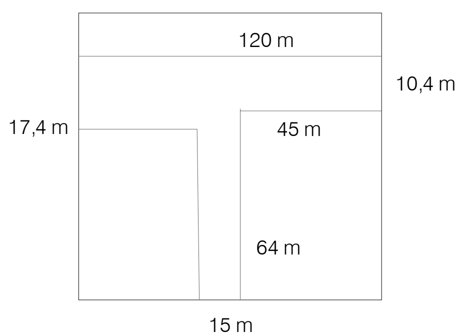
**11-** *Un señor debe realizar dos trámites y para ello dispone de 3 horas. Si el primer trámite le demanda el 70% de su tiempo, ¿de cuántos minutos dispone para el segundo?*

**12-** *En cierto poblado africano viven 600 mujeres. De ellas, el 3% se adorna con un solo pendiente. Del otro 97% la mitad usa dos pendientes y la otra mitad ninguno. ¿Cuántos pendientes llevan en total estas mujeres?*

**13-** *Un comerciante anuncia el 20% de descuento, pero antes cambia los precios marcados en las etiquetas y los aumenta un 20%. ¿Hizo algún descuento sobre el precio que tenía al empezar? ¿De cuánto?*

**14-** *Un comerciante mezcla, por partes iguales, aceites de girasol y oliva que compra a razón de \$0,90 y \$6,00 por litro, respectivamente. Al vender la mezcla gana el 30% sobre el precio de venta. Al cabo de un tiempo, los valores de costo de los aceites de girasol y de oliva han aumentado, respectivamente, en un 10 y un 15 por ciento. Si está obligado a mantener el precio de venta ¿cuál será su nuevo porcentaje de ganancia?*

**15-** *En los avisos clasificados de un diario se ofrece en venta un terreno. El mismo tiene forma de T y es interior a la manzana como muestra el dibujo. Si la manzana es cuadrada ¿qué porcentaje de ella está en venta?*




**16-** E*n nuestro país, el aumento del desempleo y el aumento de la delincuencia preocupan a la sociedad toda.*

*En un artículo publicado en el diario La Nación, el día 26/09/99, el periodista Mariano Grondona menciona el siguiente cálculo que Jermy Rifkin en su libro "El fin del trabajo" hace: por cada uno por ciento de aumento del desempleo, la criminalidad aumenta un cuatro por ciento.*

*Evidentemente existe una relación funcional entre ambas variables.*

*a) Escriba la expresión simbólica de esta función.*

*b) Discuta por qué la misma es lineal.*

*c) Suponga que en un mes la desocupación aumentó el 1,36%. Calcule qué aumento de delincuencia se puede esperar.*

*d) Busque en los diarios o en donde corresponda la cifra de desocupación del año 2003 y la del año 2005, en el mismo mes si es posible. Calcule qué variación espera en el índice de delincuencia.*

*e) Si la cantidad de personas en condiciones de trabajar es de 6.000.000. Calcule qué número de delincuentes más o menos puede esperar.*

# Respuestas Unidad 4

(Oxígeno) O $\rightarrow$ 8 ó ( O, 8); (Carbono) C $\rightarrow$ 6 ó (C, 6); (Bromo) Br $\rightarrow$ 35 ó (Br, 35); (Hidrógeno) H $\rightarrow$1 ó (H, 1). La imagen del Uranio es 92 y la del Bromo es 35.
g (Raúl) = 8. La imagen de María es 9. $Im_g = \{3,5,8,9\}$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | -1 | -1/5 | 0 | 3/2 | $\sqrt{2}$ | $\pi$ |
| $y = x^2$ | 1 | 1/25 | 0 | 9/4 | 2 | $\pi$ |

$Im_f$ es el conjunto de los reales no negativos. Si lo escribimos como intervalo es
$Im_f = [0, \infty)$
a) i) Sí; es función porque todos los elementos de A tienen imagen en B y es única.
ii) Sí, es función.
iii) No es función porque a 2 le corresponden dos valores distintos: 3 y 5.
iv) No es función porque a 3 no le corresponde ningún elemento.
v) Sí, es función.
vi) Sí, es función.
b) No es función, porque hay varios alumnos que tienen la misma edad y así, por ejemplo, seguro hay más de un alumno con 17 años, entonces a 17 le corresponde más de un elemento.
c) i) Sí, por ejemplo f: A $\rightarrow$ B tal que f(k) = j.
ii) Tres funciones distintas: k $\rightarrow$ h ; k $\rightarrow$ i ; k $\rightarrow$ j.
iii) Sí, la función dada por: h $\rightarrow$ k , i $\rightarrow$ k , j $\rightarrow$ k.
iv) Una sola, la indicada en iii).

d) Damos una posible función. Suponiendo que cada uno de los tres hubiera leído a **uno y sólo uno** de los autores, la correspondencia que asigna a cada uno el autor que leyó, es una función. Como ven, **hay suposiciones** que hacer

e) i)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 2 | 2 | 3 | 4 |
| y | 6 | 8 | 6 | 8 |

ii) No es función porque a 2 le corresponden dos elementos.

iii) No es función porque hay al menos un elemento del dominio al que le corresponde más de uno en el conjunto de llegada.

f) Una función puede ser: conjunto de llegada N y la correspondencia que asigna a cada polinomio su grado. Como se ha excluído el polinomio nulo, la imagen existe y es única para todo polinomio.

Otro ejemplo puede ser: conjunto de llegada $\Re$ y la correspondencia que asigna a cada polinomio el coeficiente del término de mayor grado.

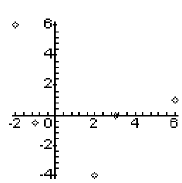
g) El primero no corresponde a una función porque hay un elemento que tiene dos imágenes. El segundo no es función porque hay un elemento que no tiene imagen. El tercero sí es función.

6- El problema por el cual y $= \sqrt{x}$ no es función de $\Re$ en $\Re$, es porque la raíz cuadrada de los números negativos no es un número real sino complejo. Al eliminar los negativos del dominio desaparece el problema.

a) (-2, 5) está en el 2do C porque tiene 1ra. componente negativa y 2da. positiva. ($\pi$, 3/4) está en el 1er C porque tiene 1ra y 2da componente positiva ( $\sqrt{2}$, -1/2) está en el 4to C porque tiene 1ra. componente positiva y 2da componente negativa. (0, 1) está en el eje de ordenadas porque tiene la 1ra componente nula. (3, 0) está en el eje de abscisas porque tiene la 2da. componente nula. (-1, -2) está en el 3er C porque tiene las dos componentes negativas.

b) i)

b) ii) Algunas respuestas son:




(4, 2); (1, 1/2); (-7, -7/2);

$(\sqrt{5} - \sqrt{5}/3)$ .

b) iii) Una posible respuesta es (-16, 8)

c) i)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | -2 | -1 | -1/2 | 0 | 1/2 | 1 |
| y | 11 | 2 | -1/4 | -1 | -1/4 | 2 | 5 |

ii) f($\pi$) $\cong$ 28,6 (con aproximación al décimo).

iii) (0, 1) no, (0, 2) no, ( $1/\sqrt{3}$,0 ) sí , (2,12) no.

f (x) > 0 para x = 2, x = 3, x = 4. f ( x ) = 0 para x = 1. f (x) < 0 para x = 5.

a) i) No es función de $\Re$ en $\Re$ porque no está definida para los números menores que a; además a los valores mayores que **a** le corresponden dos valores distintos.

ii) Sí, es función.

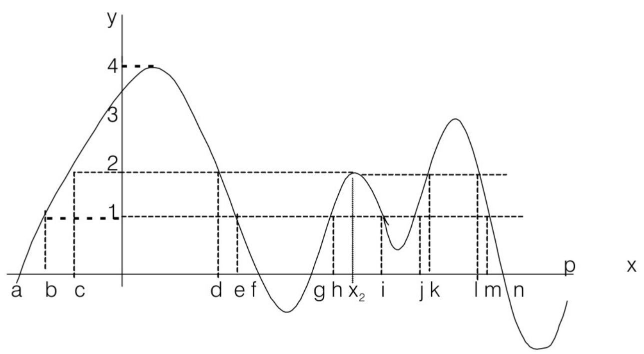
iii) No es función de $\Re$ en $\Re$ porque no está definida para los números menores que **a** ni los mayores que **b**; además a los que están entre **a** y **b** les corresponden dos valores distintos.

iv) No es función, a los elementos entre **a** y **b** les corresponden tres valores distintos.

v) No es función, a **a** le corresponden infinitos valores.

vi), vii), viii) y ix) son funciones.

b)




i) f(x) = 0 para x = a, f, g, n.

ii) f(x) =1 para x = b, e, h, i, j, m.

iii) f(x) > 0 para todo x en los intervalos abiertos (a, f) y (g, n)

v) f(x) = f($x_2$) para x = c, d, k, l.

vi) para ningún valor.

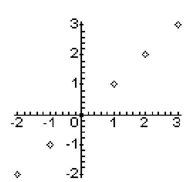
vii) para todo valor de x.

10- a- i) y=x+2 , ii) y = –x , iii) $y=\sqrt{3}x-1$ , iv) $y=\frac{3}{5}x$ , v) y=x

b- i) $a_1 = -1$ $a_0 = 3$ ; ii) $a_1 = 2$ $a_0 = -1$ ; iii) $a_1 = 3$ $a_0 = 0$ ;

iv) $a_1=-\frac{1}{2}, \quad a_0=-\sqrt{2}$ v) $a_1=-\frac{7}{2}, \quad a_0=0$

11- Obtenemos puntos aislados de la bisectriz del 1er. y 3er. cuadrante. Aquellos de coordenadas enteras

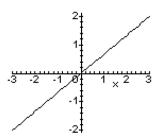


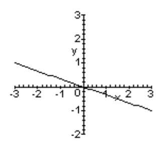
12- Uno de los axiomas de la geometría dice: “dos puntos determinan una recta a la que pertenecen”.
12- Uno de los axiomas de la geometría dice: “dos puntos determinan una recta a la que pertenecen”.

13- Una recta vertical no puede ser la gráfica de una función por que a un solo punto del dominio le corresponden infinitos valores. Por eso al decir: **sea la gráfica una función escalar** estamos diciendo que **no** sea vertical.

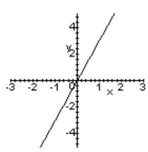
14- $AA_1 \,||\, BB_1$;  AB transversal

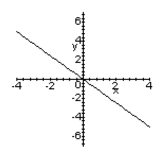
15- b) Gráfica de y = (2/3)x  c) Otro punto es (3, -1) y la gráfica es



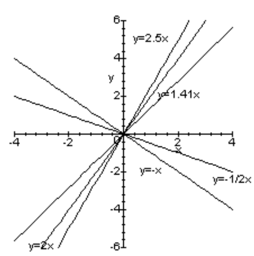


16- a) i) y = 3 x  a) ii) y = -5/4 x





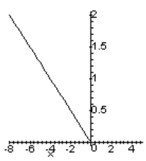
b)

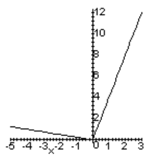
| y | m | Ordenar según pendientes de > a < | Gráfica |
|---|---|---|---|
| 2x | 2 | 2,5x |  |
| -½x | -1/2 | 2x | |
| 2,5 | 2,5x | $\sqrt{2}x$ | |
| $\sqrt{2}x$ | $\sqrt{2}$ | 0 | |
| 0 | 0 | -1/2x | |
| -x | -1 | -x | |

16- c) i) la imagen de 1 es ½
ii) no existe la imagen de 2
iii) $\Re$ - {2}.

iv) No puede ser la gráfica de $y = a_1 x$ pues esta función está definida para todos los números reales.

16- d) i) 16- e) i)



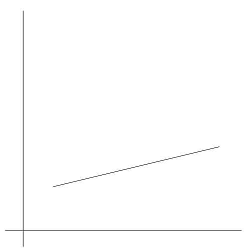




d) ii) La imagen de 0 es 0. 16- e) ii) No está definida en 0.

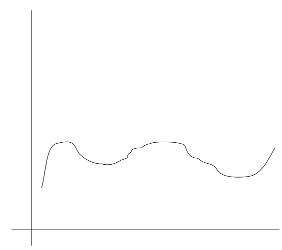
d) iii) El dominio es $\Re$ 16- e) iii) $\Re$ - { 0 }

17- a) Su representación gráfica sería una recta. Como famosa tenista cuenta con preparación física y un cierto rendimiento la gráfica podría ser una.

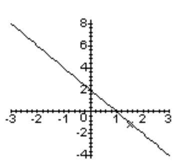
b)

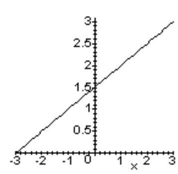


c) hay muchas formas de representarlo, si no contamos con más datos, una podría ser esta

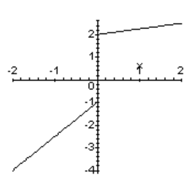


18- a) i)y = -2x+2 ii)y = 0,5x+1,5



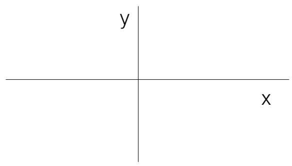

$$f(x) = \begin{cases} 3/2x - 1 & si \quad x \leq 0 \\ 1/4x + 2 & si \quad x > 0 \end{cases}$$



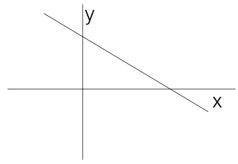
b-i) $y = 1,5\,x + 0{,}5$. ii) $y = -2x + 2$. iii) $y = 1{,}25\,x + 1{,}25$.

d-i) $m < 0$, ii) $h = 0$. iv) $m = 0$. v) $h > 0$. vi) $m = 0$. vii) $h < 0$.
viii) $m > 0$. ix) $h > 0$. xii) $m < 0$. xiii) $h < 0$

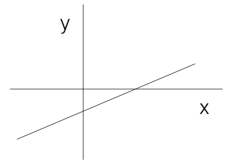
d) iii)



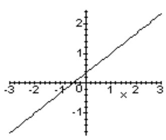

d) x)



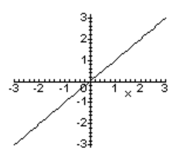

d) xi)




e) i) Si, es la función lineal $y = 2/3\,x + 1/3$ de pendiente $m = 2/3$ y ordenada al origen $h = 1/3$



e) iii) Sí, es la función idéntica $y = x$ de pendiente $m = 1$ y ordenada al origen $h = 0$.



e) ii) No es una función lineal porque x está elevada al cuadrado.

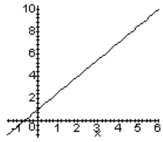
f) i) Para la ecuación de $2x - 3y + 1 = 0$ tres de las infinitas soluciones son (1,1), (0, 1/3) y (-1, -1/3). Para la ecuación $x - y = 0$ tres de las infinitas soluciones son (0, 0), (-1,-1) y (½, ½). ii) Cada ecuación tiene infinitas soluciones.

iii) Para la función $y = 2/3\,x + 1/3$ tres de los infinitos puntos son (1,1), (0, 1/3) y (-1, -1/3) y para $y = x$ (0, 0), (-1,-1) y (½, ½).

19- 1. a) paralelas; b) perpendiculares; c) coincidentes.

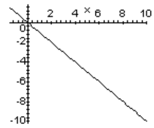
2. $y = -x$; 3. $y = \frac{-1}{2}\,x - 1$

20- a)



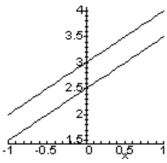
i) $x = -2/3$
ii) $x = 0$
iii) $x = -1/3$
iv) $x = 1/3$
v) $x = 6$

b)



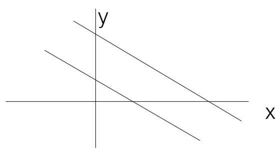
i) $x = 0$
ii) $x = -1$
iii) $x = -1/2$
iv) $x = -3/2$
v) $x = -10$

21- Las rectas son paralelas




22- a) Una solución; b) Compatible indeterminado; c) Infinitas soluciones; d) Paralelas

e)




23- h= –1 , m = ½ La función buscada es y = ½ x – 1

24- a) Podemos llamar: x: precio del champú en B, y: precio de la crema de enjuague en B.

b) ¾ x: precio del champú en A, 3/2 y: precio de la crema de enjuague en A.

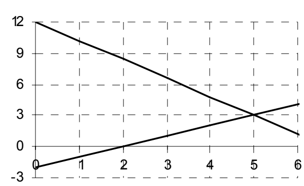
c) 3x + 2y = 18 e 9/4 x + 3y = 18. Rta: x = 4 , y = 3

25-

a) i) x = 5, y = 3

Verificación: 5 – 2 = 3

$$-\frac{9}{5}5+12=3$$

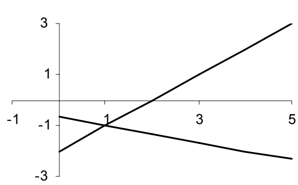



a) ii) x = 1; y = -1

Verificación:

1 – 2 = -1

$$-\frac{1}{3}1-\frac{2}{3}=-\frac{3}{3}=-1$$

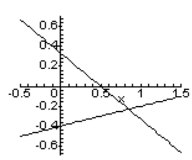



a) iii) x=11/13 y =-3/13

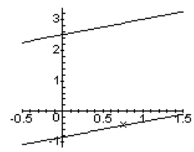
Verificación:

$$2\left(\frac{11}{13}\right)+\left(\frac{-3}{13}\right)=\left(\frac{13}{13}\right)=1$$

$$\frac{11}{13}-5\left(\frac{-3}{13}\right)=\frac{26}{13}=2$$



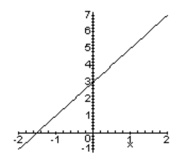
a) iv) No hay solución.



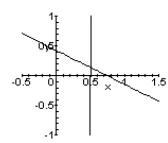
Las rectas $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ *e* $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}$

son paralelas

a) v) Hay infinitas soluciones. Las rectas son coincidentes

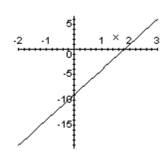


a) vi) $x=\frac{1}{2}$ $y=\frac{1}{7}$



Verificación:
$$2=\left(\frac{1}{2}\right)=1$$
$$4\left(\frac{1}{2}\right)+7\left(\frac{1}{7}\right)=3$$

b) La ecuación de la recta es y = mx + h.
Con los datos obtenemos el sistema.



$$\begin{cases}1=2m+h\\6=3m+h\end{cases}$$

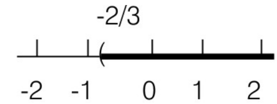
La solución es m = 5 y h = -9. La ecuación de la recta es y = 5x – 9.

c) i) Las rectas son secantes.

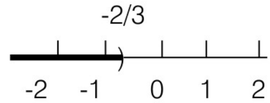
ii) Las rectas son paralelas.

26- a)

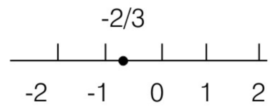
i) y > 0 para x > -2/3



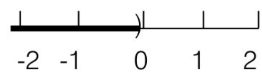

ii) y < 0 para x < -2/3



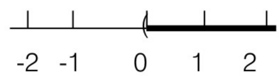

iii) y = 0 para x = -2/3



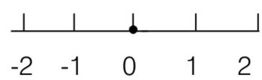

b) i) y > 0 para x < 0



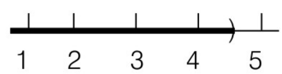

ii) y < 0 para x > 0



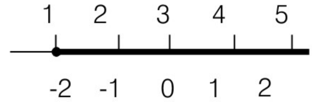

iii) y = 0 para x = 0



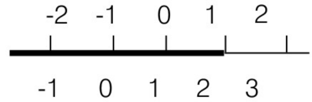

27- a) i) x < 9/2



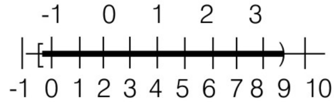

ii) x ≥ -2




iii) x ≤ 2

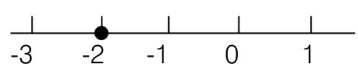



b) i) x < 9 y x ≥ -1/4




10

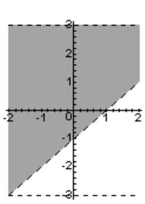
ii) x = -2



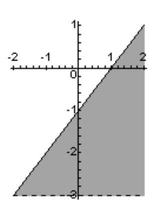

iii) ϕ

c-i) Infinitas. ii) Puede tener una sola, infinitas o ninguna

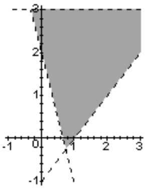
28- a)



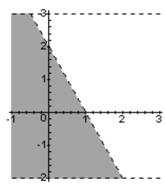
b)



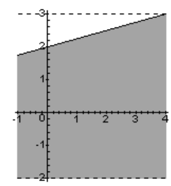
29-



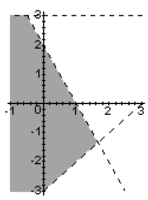
29- a) i)



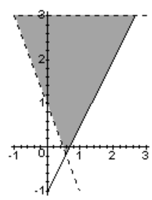
a) iii)



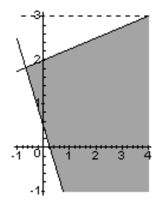
b) i)



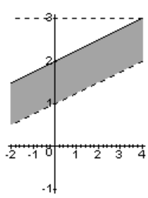
b) ii)



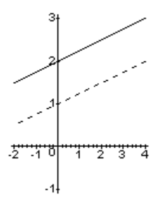
b) iii)



b) iv)

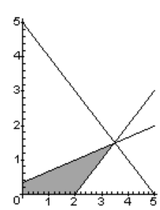


b) v)

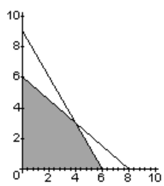


La solución es el conjunto vacío

b) vi)



31-



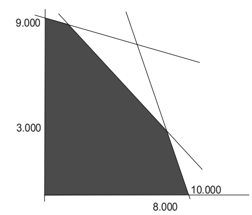
En las respuestas 27, 28 y 29 las líneas de punto horizontales fueron agregadas por el software utilizado, pero no corresponde a la gráfica de la respuesta.

32- Organizamos los datos en el siguiente cuadro.

| | A | B | gr. disponibles |
|---|---|---|---|
| Droga I | 0,15 | 0,6 | 5.400 |
| Droga II | 0,6 | 0,6 | 6.000 |
| Droga III | 0,75 | 0,3 | 6000 |

Llamamos: x: al número de cajas de la variedad A que debe elaborar el laboratorio e y: al número de cajas de la variedad B que debe elaborar el laboratorio, el sistema de inecuaciones es:

$$\begin{cases} 0{,}15x + 0{,}6y \le 5400 \\ 0{,}6x + 0{,}6y \le 6000 \\ 0{,}75x + 0{,}3y \le 6000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$




El conjunto solución es el sombreado

33-

| Peso | Elongación | Razón |
|---|---|---|
| 2 | 5 | 0,4 |
| 3,2 | 8 | 0,4 |
| 1,6 | 4 | 0,4 |
| 1 | 2,5 | 0,4 |
| 2,4 | 6 | 0,4 |
| 3 | 7,5 | 0,4 |

34- a) La fórmula de proporcionalidad responde a una función lineal homogénea, por lo que debe ser y = kx, donde y: extensión de las manchas de color; x: compensaciones colorísticas.
b) La proporcionalidad y ritmo presentes en el aparente desorden de los múltiples elementos usados.
35- Porque es constante la relación entre el precio marcado y el precio con descuento.
36- y = 0,12 x , para calcular 12 % y = 0,01 x , para calcular 1 %
y = 0,45 x , para calcular 45 % y = 0,023 x , para calcular 2,3 %
a) $ 261,50 ; b) i) $ 89,52; b) ii) $ 156,64 ; b) iii) $ 101,14
37- a) 128 millones, b) 90%, c) 115,2 millones, d) 10 millones, e) 7,8 %, f) 31,25%.

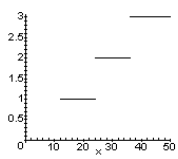
*Ejercicios de aplicación*

1- a) $D_f = \Re^+$ , $Im_f$ es el conjunto de números que corresponden a los distintos precios del franqueo.

b) No hay ley que pueda expresarse por una fórmula porque el precio es el mismo para cartas cuyos pesos están comprendidos entre ciertos valores. 1-c) La grafica es escalonada semejante a la del ejercicio 2-b).

2- a) $D_g = [0, 1440]$. Si consideramos como edad máxima posible para un ser humano 120 años el conjunto imagen es $Im_g = \{0, 1, 2, 3,..., 120\}$

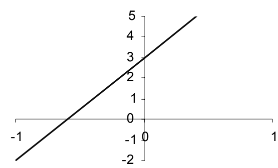
b)




3-

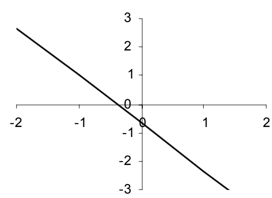
a) pendiente: 5

ordenada al origen: 3



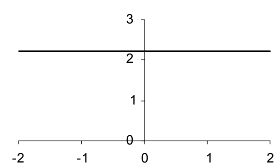

b) pendiente: - 5/3

ordenada al origen: -2/3




c) pendiente: 0

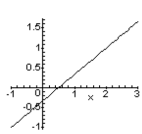
ordenada al origen:

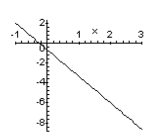


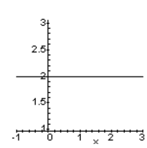

4- i) a) la ecuación es: y = 2/3x-1/3

b) la ecuación es: y = -8/3x-2/3

c) la ecuación es y = 2







ii) a) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ b) y = 3 x – 4 c) y = 2 x + 6

d) $y = 3x - 6$ e) $y = \frac{-5}{2}x - \frac{3}{2}$

iii) a) pend.: -1; ord. al origen: 1 b) pend.: -2/3; ord. al origen: -2 c) pend.: -1/3; ord. al origen: 2.

iv) Damos estos puntos como una posible respuesta, usted pudo haber encontrado otros. Recuerde que en cada recta hay infinitos puntos.

a) (0, 1); (1, 0) y (2, -1) b) (0, -2); (-4,5; 1) y (-5/2, -1/3) c) (0, 2), (3, 1) y (-1/5, 31/15)

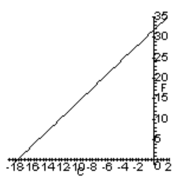
5- a) Llamemos A al valor que nos indica el termómetro Celsius y B al valor que nos indica el termómetro Farenheit, entonces

$\frac{A^oC - 0^oC}{100^o - 0^oC} = \frac{B^oF - 32^oF}{212^oF - 32^oF}$ y si prescindimos de las unidades obtenemos

$$\frac{A}{100} = \frac{B-32}{180} \Rightarrow B - 32 = \frac{180}{100}A \Rightarrow B = 1{,}8A + 32$$

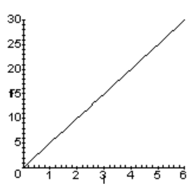
b) B = 1,8 A + 32 es una función lineal. Su gráfica es la recta de pendiente 1,8 que pasa por (0,32).

c)




d) Sí, $-40^oC = -40^oF$

6- a)




b) $l_1$ = 5 cm., $F_1$ = 25 dyn; $l_2$ = 3,3 cm., $F_2$ =16,5 dyn; $l_3$ = 8 cm., $F_3$ =40 dyn.

c) $F_1$ = 30 dyn, $l_1$ = 6 cm.; $F_2$ = 5 dyn, $l_2$ = 1 cm; $F_3$ = 55 dyn, $l_3$ = 11 cm.

d) La fuerza aplicada a un resorte es directamente proporcional al estiramiento que éste sufre.

7- Si llamamos x al número de años que deben transcurrir, la ecuación que modela la situación es 30 + x = 2(2 + x), cuya solución es x = 26. La respuesta es: dentro de 26 años la edad del padre será el doble de la del hijo.

8- Adultos:$ 4, Menores: $ 2.

9- Ganó 5 veces y empató 12.

10- La masa de Na presente en los 10 g es 4,338 g. y representa un 43,38 %.

11- Dispone de 54 m. para el segundo trámite.
12- El número de pendientes es 600.
13- El descuento que hizo sobre el precio original es del 4 %.
14- El porcentaje de ganancia se reduce al 19,92 %.
15- Está en venta casi el 19% de la superficie.