1.10 RECTAS

Pendiente de una recta ▶ Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta ▶ Forma pendiente e intersección de la ecuación de una recta ▶ Rectas verticales y horizontales ▶ Ecuación general de una recta ▶ Rectas paralelas y perpendiculares ▶ Modelado con ecuaciones lineales: pendiente como rapidez de cambio

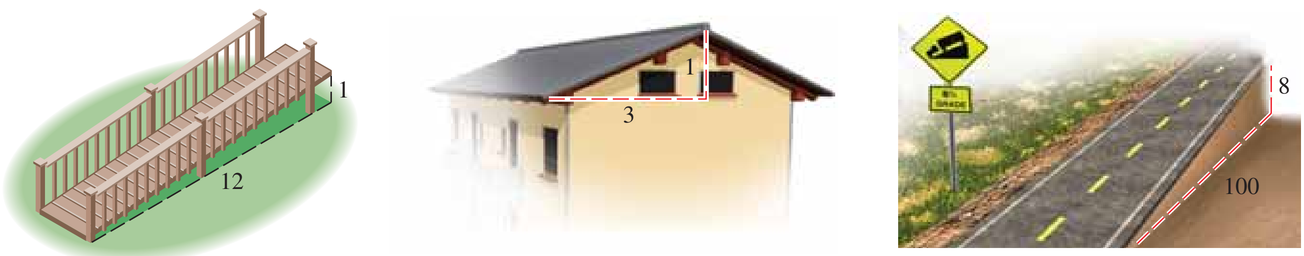
En esta sección encontramos ecuaciones para rectas que se encuentren en un plano de coordenadas. Las ecuaciones dependerán de cómo esté inclinada la recta, por lo que empezamos por estudiar el concepto de pendiente.

▼ Pendiente de una recta

Primero necesitamos una forma de medir la "inclinación" de una recta, o cuál es la rapidez con la que sube (o baja) cuando pasamos de izquierda a derecha. Definimos el *corrimiento* como la distancia que nos movemos a la derecha y la *elevación* como la distancia correspondiente que la recta sube (o baja). La *pendiente* de una recta es la relación entre la elevación y el corrimiento:

$$\text{pendiente} = \frac{\text{elevación}}{\text{corrimiento}}$$

La Figura 1 muestra situaciones en las que la pendiente es importante. Los carpinteros usan el término *inclinación* para la pendiente de un techo o una escalera; el término *pendiente* se usa para la pendiente de una carretera.



Pendiente de una rampa
Pendiente $= \frac{1}{12}$

Inclinación de un techo
Pendiente $= \frac{1}{3}$

Pendiente de una carretera
Pendiente $= \frac{8}{100}$

FIGURA 1

Si una recta está en un plano de coordenadas, entonces el **corrimiento** es el cambio en la coordenada x y la **elevación** es el cambio correspondiente en la coordenada y entre cualesquier dos puntos sobre la recta (vea Figura 2). Esto nos da la siguiente definición de pendiente.

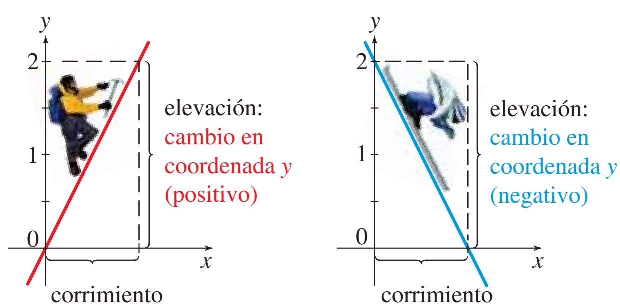


FIGURA 2

PENDIENTE DE UNA RECTA

La **pendiente** m de una recta no vertical que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{corrimiento}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente de una recta vertical no está definida.

La pendiente es independiente de cuáles dos puntos se escojan sobre la recta. Podemos ver que esto es verdadero en los triángulos semejantes de la Figura 3:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}$$

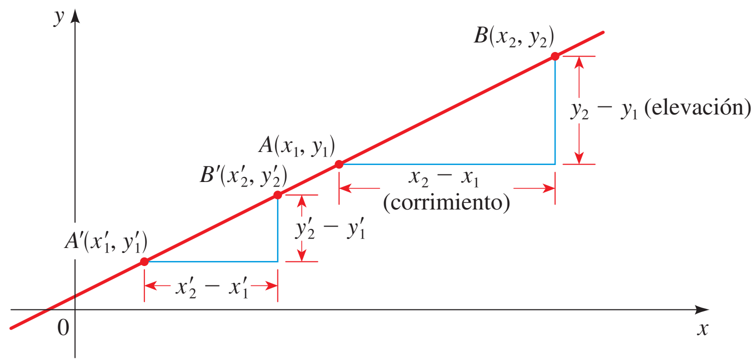


FIGURA 3

La Figura 4 muestra varias rectas marcadas con sus pendientes. Observe que las rectas con pendiente positiva se inclinan hacia arriba a la derecha, mientras que las rectas con pendiente negativa se inclinan hacia abajo a la derecha. Las rectas más inclinadas son aquellas para las que el valor absoluto de la pendiente es muy grande; una recta horizontal tiene pendiente cero.

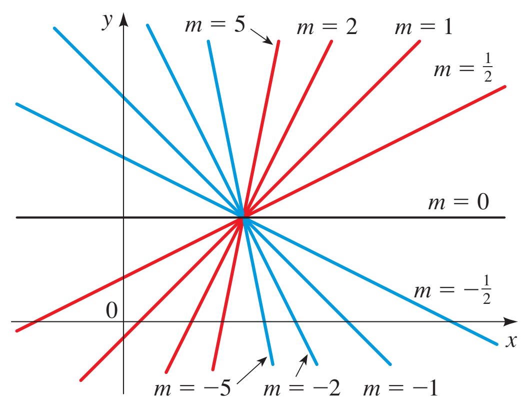


FIGURA 4 Rectas con varias pendientes

EJEMPLO 1 | Hallar la pendiente de una recta que pasa por dos puntos

Encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(2, 1)$ y $Q(8, 5)$.

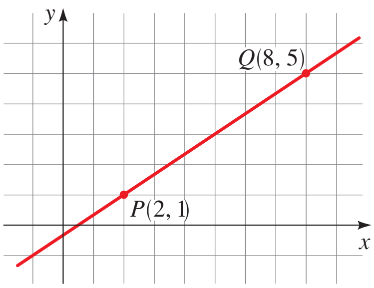


FIGURA 5

SOLUCIÓN Dado que cualesquier dos puntos determinan una recta, sólo una recta pasa por estos dos puntos. De la definición, la pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{8 - 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Esto nos dice que por cada 3 unidades que nos movemos a la derecha, la recta sube 2 unidades. La recta está trazada en la Figura 5.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5** ■

▼ Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta

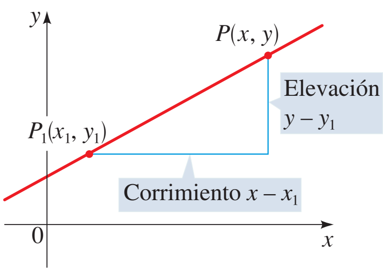


FIGURA 6

Encontremos ahora la ecuación de la recta que pasa por un punto determinado $P(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m. Un punto $P(x, y)$ con $x \neq x_1$ está sobre esta recta si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es igual a m (vea Figura 6), es decir,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Esta ecuación se puede reescribir en la forma $y - y_1 = m(x - x_1)$; nótese que la ecuación también se satisface cuando $x = x_1$ y $y = y_1$. Por lo tanto, es una ecuación de la recta dada.

FORMA PUNTO-PENDIENTE DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Una ecuación de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EJEMPLO 2 | Hallar la ecuación de una recta con punto y pendiente dados

(a) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(1, -3)$ con pendiente $-\frac{1}{2}$.

(b) Trace la recta.

SOLUCIÓN

(a) Usando la forma punto-pendiente con $m = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 1$ y $y_1 = -3$, obtenemos la ecuación de la recta como

$$\begin{aligned} y + 3 &= -\tfrac{1}{2}(x - 1) && \text{Pendiente } m = -\tfrac{1}{2}\text{, punto } (1, -3) \\ 2y + 6 &= -x + 1 && \text{Multiplique por 2} \\ x + 2y + 5 &= 0 && \text{Reacomode} \end{aligned}$$

(b) El hecho de que la pendiente es $-\frac{1}{2}$ nos dice que cuando nos movemos 2 unidades a la derecha, la recta baja 1 unidad. Esto hace posible que tracemos la recta de la Figura 7.

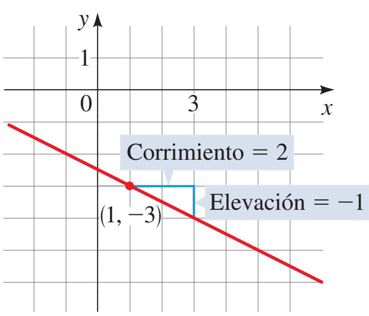


FIGURA 7

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19** ■

EJEMPLO 3 | Hallar la ecuación de una recta que pase por dos puntos determinados

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -4)$.

SOLUCIÓN La pendiente de la recta es

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Podemos usar *ya sea* el punto $(-1, 2)$ *o* el punto $(3, -4)$, en la ecuación punto-pendiente. Terminaremos con la misma respuesta final.

Usando la forma punto-pendiente con $x_1 = -1$ y $y_1 = 2$, obtenemos

$$y - 2 = -\tfrac{3}{2}(x + 1) \qquad \text{Pendiente } m = -\tfrac{3}{2}, \text{ punto } (-1, 2)$$

$$2y - 4 = -3x - 3 \qquad \text{Multiplique por 2}$$

$$3x + 2y - 1 = 0 \qquad \text{Reacomode}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

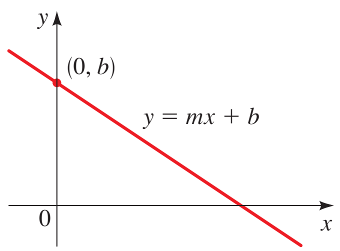


FIGURA 8

Forma pendiente e intersección de la ecuación de una recta

Suponga que una recta no vertical tiene pendiente m y a b como punto de intersección con el eje y (vea Figura 8). Esto significa que la recta cruza el eje y en el punto $(0, b)$, de modo que la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, con $x = 0$ y $y = 0$, se convierte en

$$y - b = m(x - 0)$$

Esto se simplifica a $y = mx + b$, que se denomina **forma pendiente-punto de intersección** de la ecuación de una recta.

FORMA PENDIENTE-PUNTO DE INTERSECCIÓN DE UNA RECTA

Una ecuación de la recta que tiene pendiente m y punto de intersección b en el eje y es

$$y = mx + b$$

EJEMPLO 4 | Rectas en forma de pendiente e intersección

(a) Encuentre la ecuación de la recta con pendiente 3 e intersección y de -2.

(b) Encuentre la pendiente e intersección y de la recta $3y - 2x = 1$.

SOLUCIÓN

(a) Como $m = 3$ y $b = -2$, de la forma de pendiente-punto de intersección de la ecuación de una recta obtenemos

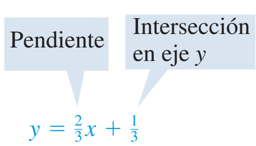
$$y = 3x - 2$$

(b) Primero escribimos la ecuación en la forma $y = mx + b$:

$$3y - 2x = 1$$

$$3y = 2x + 1 \qquad \text{Sume } 2x$$

$$y = \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3} \qquad \text{Divida entre 3}$$



De la forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta, vemos que la pendiente es $m = \frac{2}{3}$ y la intersección en el eje y es $b = \frac{1}{3}$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **25** Y **47**

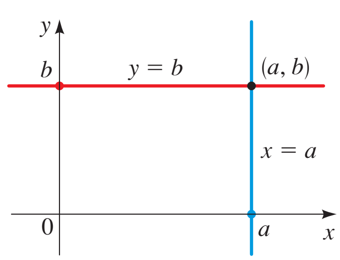


FIGURA 9

Rectas verticales y horizontales

Si una recta es horizontal, su pendiente es $m = 0$, de modo que su ecuación es $y = b$, donde b es el punto de intersección con el eje y (vea Figura 9). Una recta vertical no tiene pendiente, pero podemos escribir su ecuación como $x = a$, donde a es el punto de intersección con el eje x, porque la coordenada x de todo punto en la recta es a.

RECTAS VERTICALES Y HORIZONTALES

Una ecuación de la recta vertical que pasa por (a, b) es $x = a$.

Una ecuación de la recta horizontal que pasa por (a, b) es $y = b$.

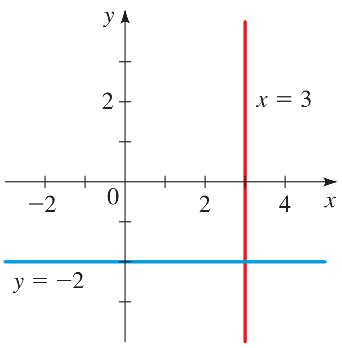


FIGURA 10

EJEMPLO 5 | Rectas verticales y horizontales

(a) Una ecuación para la recta vertical que pasa por (3, 5) es $x = 3$.

(b) La gráfica de la ecuación $x = 3$ es una recta vertical con intersección 3 en el eje x.

(c) Una ecuación para la recta horizontal que pasa por $(8, -2)$ es $y = -2$.

(d) La gráfica de la ecuación $y = -2$ es una recta horizontal con intersección -2 en el eje y.

Las rectas están graficadas en la Figura 10.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **29** Y **33**

▼ Ecuación general de una recta

Una **ecuación lineal** es una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0$$

donde A, B y C son constantes y A y B no son 0 ambas. La ecuación de una recta es una ecuación lineal:

- Una recta no vertical tiene la ecuación $y = mx + b$ o $-mx + y - b = 0$, que es una ecuación lineal con $A = -m$, $B = 1$ y $C = -b$.
- Una recta vertical tiene la ecuación $x = a$ o $x - a = 0$, que es una ecuación lineal con $A = 1$, $B = 0$ y $C = -a$.

  A la inversa, la gráfica de una ecuación lineal es una recta.

- Si $B \neq 0$, la ecuación se convierte en

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad \text{Divida por } B$$

  y ésta es la forma de pendiente-intersección de la ecuación de una recta (con $m = -A/B$ y $b = -C/B$).

- Si $B = 0$, la ecuación se convierte en

$$Ax + C = 0 \qquad \text{Haga } B = 0$$

  o $x = -C/A$, que representa una recta vertical.

Hemos demostrado lo siguiente.

EUCACIÓN GENERAL DE UNA RECTA

La gráfica de toda **ecuación lineal**

$$Ax + By + C = 0 \qquad (A, B \text{ no son cero ambas})$$

es una recta. A la inversa, toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

EJEMPLO 6 | Graficar una ecuación lineal

Trace la gráfica de la ecuación $2x - 3y - 12 = 0$.

SOLUCIÓN 1 Como la ecuación es lineal, su gráfica es una recta. Para trazar la gráfica, es suficiente hallar dos puntos cualesquiera en la recta. Los puntos de intersección son los más fáciles de hallar.

Punto de intersección con x: Sustituya $y = 0$, para obtener $2x - 12 = 0$, por lo que $x = 6$

Punto de intersección con y: Sustituya $x = 0$, para obtener $-3y - 12 = 0$, por lo que $y = -4$

Con estos puntos podemos trazar la gráfica de la Figura 11.

SOLUCIÓN 2 Escribimos la ecuación en forma pendiente-intersección:

$$
\begin{aligned}
2x - 3y - 12 &= 0 \\
2x - 3y &= 12 && \text{Sume 12} \\
-3y &= -2x + 12 && \text{Reste } 2x \\
y &= \tfrac{2}{3}x - 4 && \text{Divida entre } -3
\end{aligned}
$$

Esta ecuación está en la forma $y = mx + b$, por lo que la pendiente es $m = \frac{2}{3}$ y la intersección y es $b = -4$. Para trazar la gráfica, localizamos el punto de intersección con el eje y y nos movemos 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba, como se muestra en la Figura 12.

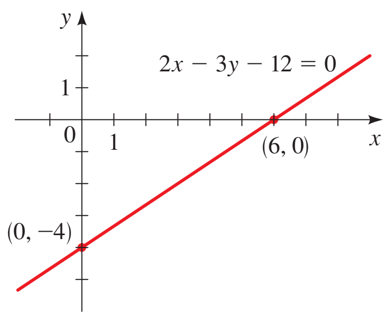


FIGURA 11

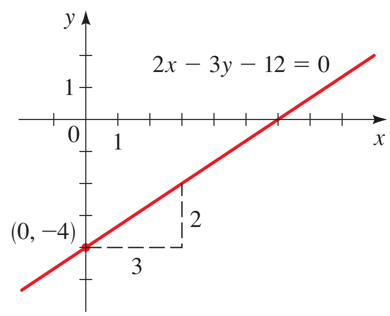


FIGURA 12

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **53** ■

Rectas paralelas y perpendiculares

Como la pendiente mide la inclinación de una recta, parece razonable que las rectas paralelas deban tener la misma pendiente. De hecho, podemos demostrar esto.

> **RECTAS PARALELAS**
>
> Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

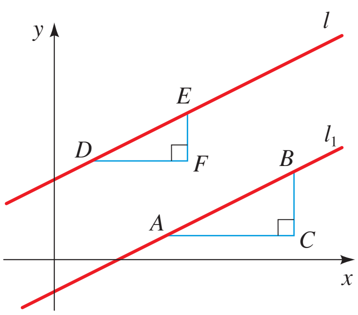


FIGURA 13

DEMOSTRACIÓN Consideremos que las rectas l1 y l2 de la Figura 13 tienen pendientes m_1 y m_2. Si las rectas son paralelas, entonces los triángulos rectos ABC y DEF son semejantes, por lo que

$$m_1 = \frac{d(B, C)}{d(A, C)} = \frac{d(E, F)}{d(D, F)} = m_2$$

A la inversa, si las pendientes son iguales, entonces los triángulos serán semejantes, por lo que $\angle BAC = \angle EDF$ y las rectas son paralelas. ■

EJEMPLO 7 | Hallar la ecuación de una recta paralela a una recta dada

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (5, 2) que es paralela a la recta $4x + 6y + 5 = 0$.

SOLUCIÓN Primero escribimos la ecuación de la recta dada en forma de pendiente-intersección.

$$\begin{aligned} 4x + 6y + 5 &= 0 \\ 6y &= -4x - 5 && \text{Reste } 4x + 5 \\ y &= -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{5}{6} && \text{Divida entre 6} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la recta tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$. Como la recta requerida es paralela a la recta dada, también tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$. De la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, obtenemos

$$\begin{aligned} y - 2 &= -\tfrac{2}{3}(x - 5) && \text{Pendiente } m = -\tfrac{2}{3}\text{, punto } (5, 2) \\ 3y - 6 &= -2x + 10 && \text{Multiplique por 3} \\ 2x + 3y - 16 &= 0 && \text{Reacomode} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta requerida es $2x + 3y - 16 = 0$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

La condición para rectas perpendiculares no es tan obvia como la de las rectas paralelas.

RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1 m_2 = -1$, es decir, sus pendientes son recíprocas negativas:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

También, una recta horizontal (pendiente 0) es perpendicular a una recta vertical (sin pendiente).

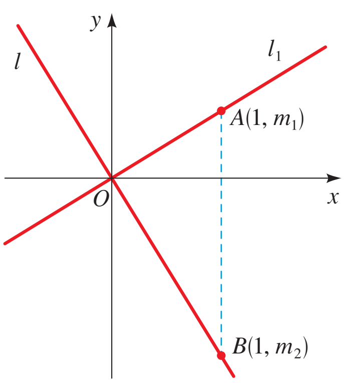


FIGURA 14

DEMOSTRACIÓN En la Figura 14 mostramos dos rectas que se cruzan en el origen. (Si las rectas se cruzan en algún otro punto, consideramos rectas paralelas a éstas que se cruzan en el origen. Estas rectas tienen las mismas pendientes que las rectas originales.

Si las rectas l_1 y l_2 tienen pendientes m_1 y m_2, entonces sus ecuaciones son $y = m_1 x$ y $y = m_2 x$. Observe que $A(1, m_1)$ está sobre l_1 y $B(1, m_2)$ está sobre l_2. Por el Teorema de Pitágoras y su inverso (vea página 219) $OA \perp OB$ si y sólo si

$$[d(O, A)]^2 + [d(O, B)]^2 = [d(A, B)]^2$$

Por la Fórmula de la Distancia, esto se convierte en

$$\begin{aligned} (1^2 + m_1^2) + (1^2 + m_2^2) &= (1 - 1)^2 + (m_2 - m_1)^2 \\ 2 + m_1^2 + m_2^2 &= m_2^2 - 2m_1 m_2 + m_1^2 \\ 2 &= -2m_1 m_2 \\ m_1 m_2 &= -1 \end{aligned}$$

EJEMPLO 8 | Rectas perpendiculares

Demuestre que los puntos $P(3, 3)$, $Q(8, 17)$ y $R(11, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

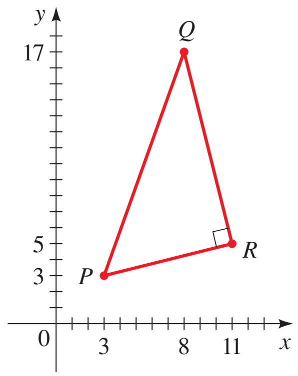


FIGURA 15

SOLUCIÓN Las pendientes de las rectas que contienen a PR y QR son, respectivamente,

$$m_1 = \frac{5-3}{11-3} = \frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad m_2 = \frac{5-17}{11-8} = -4$$

Como $m_1 m_2 = -1$, estas rectas son perpendiculares, de modo que PQR es un triángulo rectángulo que aparece en la Figura 15.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **57**

EJEMPLO 9 | Hallar una ecuación de una recta perpendicular a una recta dada

Encuentre la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $4x + 6y + 5 = 0$ y pasa por el origen.

SOLUCIÓN En el Ejemplo 7 encontramos que la pendiente de la recta $4x + 6y + 5 = 0$ es $-\frac{2}{3}$. Entonces, la pendiente de una recta perpendicular es el recíproco negativo, es decir, $\frac{3}{2}$. Como la recta pedida pasa por (0, 0), la forma punto-pendiente da

$$y - 0 = \tfrac{3}{2}(x - 0) \qquad \text{Pendiente } m = \tfrac{3}{2}, \text{ punto } (0, 0)$$

$$y = \tfrac{3}{2}x \qquad \text{Simplifique}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

EJEMPLO 10 | Graficar una familia de rectas

Use una calculadora graficadora para graficar la familia de rectas

$$y = 0.5x + b$$

para $b = -2, -1, 0, 1, 2$. ¿Qué propiedad comparten las rectas?

SOLUCIÓN Las rectas están graficadas en la Figura 16 en el rectángulo de vista $[-6, 6]$ por $[-6, 6]$. Las rectas tienen todas ellas la misma pendiente, por lo que son paralelas.

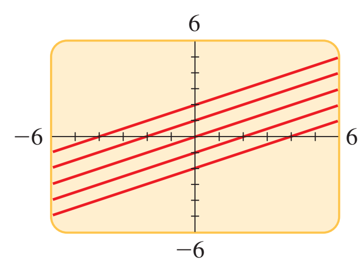


FIGURA 16 $y = 0.5x + b$

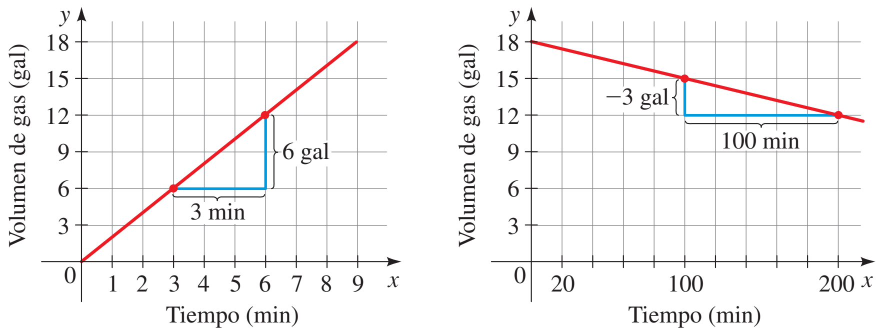
AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41**

▼ Modelado con ecuaciones lineales: pendiente como rapidez de cambio

Cuando se usa una recta para modelar la relación entre dos cantidades, la pendiente de la recta es la **rapidez de cambio** de una cantidad con respecto a la otra. Por ejemplo, la gráfica de la Figura 17(a) en la página siguiente da la cantidad de gas en un tanque que se está llenando. La pendiente entre los puntos indicados es

$$m = \frac{6 \text{ galones}}{3 \text{ minutos}} = 2 \text{ gal/min}$$

La pendiente es la *rapidez* a la que se está llenando el tanque, 2 galones por minuto. En la Figura 17(b) el tanque se está drenando con una *rapidez* de 0.03 galones por minuto y la pendiente es -0.03.



(a) Tanque llenado a 2 gal/min
La pendiente de la recta es 2

(b) Tanque drenado a 0.03 gal/min
La pendiente de la recta es -0.03

FIGURA 17

Los siguientes dos ejemplos dan otras situaciones en las que la pendiente de una recta es una rapidez de cambio.

EJEMPLO 11 | Pendiente como rapidez de cambio

Una presa se construye en un río para crear un estanque. El nivel de agua w del estanque está dado por la ecuación

$$w = 4.5t + 28$$

donde t es el número de años desde que se construyó la presa y w se mide en pies.

(a) Trace la gráfica de esta ecuación.

(b) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección w de esta gráfica?

SOLUCIÓN

(a) Esta ecuación es lineal, por lo que su gráfica es una recta. Como dos puntos determinan una recta, localizamos dos puntos que estén sobre la gráfica y trazamos una recta que pase por ellos.

Cuando $t = 0$, entonces $w = 4.5(0) + 28 = 28$, por lo que $(0, 28)$ está sobre la recta.

Cuando $t = 2$, entonces $w = 4.5(2) + 28 = 37$, por lo que $(2, 37)$ está sobre la recta.

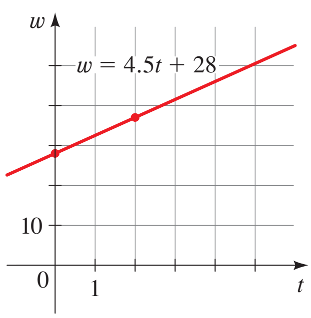


FIGURA 18

La recta determinada por esos puntos se muestra en la figura 18.

(b) La pendiente es $m = 4.5$; representa la rapidez de cambio del nivel de agua con respecto al tiempo. Esto significa que el nivel de agua *aumenta* 4.5 pies por año. El punto de intersección w es 28 y se presenta cuando $t = 0$, por lo que representa el nivel de agua cuando la presa se construyó.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

EJEMPLO 12 | Relación lineal entre temperatura y elevación

(a) A medida que el aire seco sube, se dilata y se enfría. Si la temperatura al nivel del suelo es de 20°C y la temperatura a una altitud de 1 km es 10°C, exprese la temperatura T (en °C) en términos de la altitud h (en km). (Suponga que la relación entre T y H es lineal.)

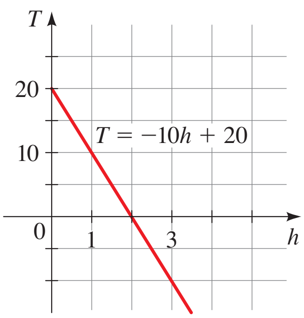


FIGURA 19

(b) Trace la gráfica de la ecuación lineal. ¿Qué representa su pendiente?

(c) ¿Cuál es la temperatura a una altitud de 2.5 km?

SOLUCIÓN

(a) Como estamos suponiendo una relación lineal entre T y h, la ecuación debe ser de la forma

$$T = mh + b$$

donde m y b son constantes. Cuando $h = 0$, nos dicen que $T = 20$, de modo que

$$20 = m(0) + b$$
$$b = 20$$

Por lo tanto, tenemos

$$T = mh + 20$$

Cuando $h = 1$, tenemos $T = 10$ y entonces

$$10 = m(1) + 20$$
$$m = 10 - 20 = -10$$

La expresión requerida es

$$T = -10h + 20$$

(b) La gráfica está trazada en la Figura 19. La pendiente es $m = -10$ºC/km, y ésta representa la rapidez de cambio de temperatura con respecto a la distancia arriba del suelo. En consecuencia, la temperatura *disminuye* 10ºC por kilómetro de altitud.

(c) A una altitud de $h = 2.5$ km la temperatura es

$$T = -10(2.5) + 20 = -25 + 20 = -5\,°\mathrm{C}$$

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **73** ■

1.10 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Encontramos la "inclinación", o pendiente, de una recta que pasa por dos puntos al dividir la diferencia en las coordenadas ____ de estos puntos entre la diferencia en las coordenadas ____. Entonces, la recta que pasa por los puntos (0, 1) y (2, 5) tiene pendiente ________.

2. Una recta tiene la ecuación $y = 3x + 2$.

(a) Esta recta tiene pendiente ______.

(b) Cualquier recta paralela a esta recta tiene pendiente_____.

(c) Cualquier recta perpendicular a esta recta tiene pendiente ____.

3. La forma punto-pendiente de la ecuación de la recta con pendiente 3 que pasa por el punto (1, 2) es______.

4. (a) La pendiente de una recta horizontal es____. La ecuación de la recta horizontal que pasa por (2, 3) es______.

(b) La pendiente de una recta vertical es_____. La ecuación de la recta vertical que pasa por (2, 3) es_____.

HABILIDADES

5-12 ■ Encuentre la pendiente de la recta que pasa por P y Q.

5. $P(0, 0)$, $Q(4, 2)$

6. $P(0, 0)$, $Q(2, -6)$

7. $P(2, 2)$, $Q(-10, 0)$

8. $P(1, 2)$, $Q(3, 3)$

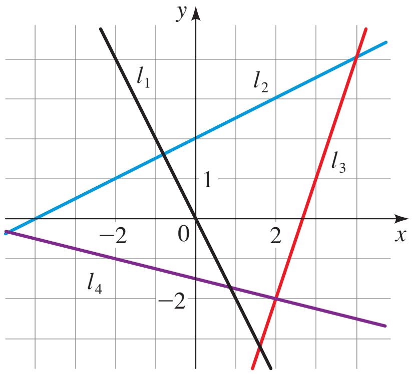
9. $P(2, 4)$, $Q(4, 3)$

10. $P(2, -5)$, $Q(-4, 3)$

11. $P(1, -3)$, $Q(-1, 6)$

12. $P(-1, -4)$, $Q(6, 0)$

13. Encuentre las pendientes de las rectas l_1, l_2, l_3 y l_4 en la figura siguiente.

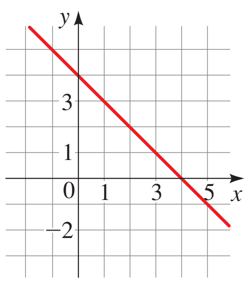


14. **(a)** Trace rectas que pasen por (0, 0) con pendientes 1, 0, $\frac{1}{2}$, 2 y -1.

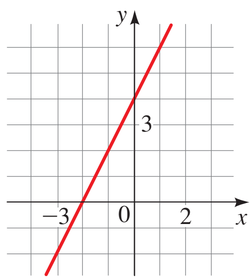
(b) Trace rectas que pasen por (0, 0) con pendientes $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ y 3.

15-18 ■ Encuentre la ecuación para la recta cuya gráfica está trazada.

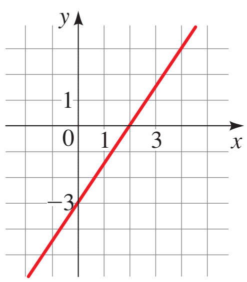
15.



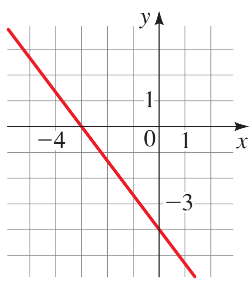
16.



17.



18.



19-38 ■ Encuentre la ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas.

19. Pasa por (2, 3), pendiente 5

20. Pasa por $(-2, 4)$, pendiente -1

21. Pasa por (1, 7), pendiente $\frac{2}{3}$

22. Pasa por $(-3, -5)$, pendiente $-\frac{7}{2}$

23. Pasa por (2, 1) y (1, 6)

24. Pasa por $(-1, -2)$ y (4, 3)

25. Pendiente 3; intersección en y es -2

26. Pendiente $\frac{2}{5}$; intersección en y es 4

27. Intersección en x es 1; intersección en y es -3

28. Intersección en x es -8; intersección en y es 6

29. Pasa por (4, 5); paralela al eje x

30. Pasa por (4, 5); paralela al eje y

31. Pasa por $(1, -6)$; paralela a la recta $x + 2y = 6$

32. Intersección en y es 6; paralela a la recta $2x + 3y + 4 = 0$

33. Pasa por $(-1, 2)$; paralela a la recta $x = 5$

34. Pasa por (2, 6); perpendicular a la recta $y = 1$

35. Pasa por $(-1, -2)$; perpendicular a la recta $2x + 5y + 8 = 0$

36. Pasa por $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$; perpendicular a la recta $4x - 8y = 1$

37. Pasa por (1, 7); paralela a la recta que pasa por (2, 5) y $(-2, 1)$

38. Pasa por $(-2, -11)$; perpendicular a la recta que pasa por (1, 1) y $(5, -1)$

39. **(a)** Trace la recta con pendiente $\frac{3}{2}$ que pasa por el punto $(-2, 1)$

(b) Encuentre la ecuación para esta recta.

40. **(a)** Trace la recta con pendiente -2 que pasa por el punto $(4, -1)$

(b) Encuentre la ecuación para esta recta.

41-44 ■ Use calculadora graficadora para graficar la familia de rectas dada en el mismo rectángulo de vista. ¿Qué tienen en común las rectas?

41. $y = -2x + b$ para $b = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 6$

42. $y = mx - 3$ para $m = 0, \pm 0.25, \pm 0.75, \pm 1.5$

43. $y = m(x - 3)$ para $m = 0, \pm 0.25, \pm 0.75, \pm 1.5$

44. $y = 2 + m(x + 3)$ para $m = 0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 2, \pm$

45-56 ■ Encuentre la pendiente y el punto de intersección y de la recta y trace su gráfica.

45. $x + y = 3$

46. $3x - 2y = 12$

47. $x + 3y = 0$

48. $2x - 5y = 0$

49. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + 1 = 0$

50. $-3x - 5y + 30 = 0$

51. $y = 4$

52. $x = -5$

53. $3x - 4y = 12$

54. $4y + 8 = 0$

55. $3x + 4y - 1 = 0$

56. $4x + 5y = 10$

57. Use pendientes para demostrar que $A(1, 1)$, $B(7, 4)$, $C(5, 10)$ y $D(-1, 7)$ son vértices de un paralelogramo.

58. Use pendientes para demostrar que $A(-3, -1)$, $B(3, 3)$ y $C(-9, 8)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

59. Use pendientes para demostrar que $A(1, 1)$, $B(11, 3)$, $C(10, 8)$ y $D(0, 6)$ son vértices de un rectángulo.

60. Use pendientes para determinar si los puntos dados son colineales (están sobre una recta).

(a) (1, 1), (3, 9), (6, 21)

(b) $(-1, 3)$, (1, 7), (4, 15)

61. Encuentre una ecuación del bisector perpendicular del segmento de recta que une los puntos $A(1, 4)$ y $B(7, -2)$

62. Encuentre el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta

$$2y + 3x - 6 = 0$$

63. (a) Demuestre que si los puntos de intersección x y y de una recta son números diferentes de cero a y b, entonces la ecuación de la recta se puede escribir en la forma

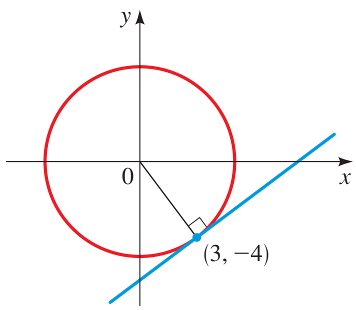
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ésta se llama **forma dos puntos de intersección** de la ecuación de una recta.

(b) Use la parte (a) para hallar la ecuación de la recta cuyo punto de intersección x es 6 y cuyo punto de intersección y es -8.

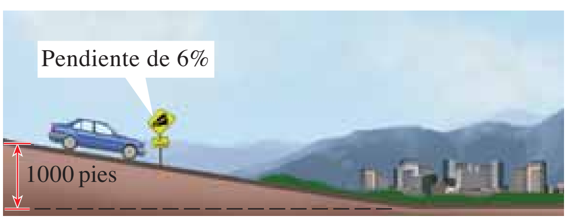
64. (a) Encuentre la ecuación para la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, -4)$. (Vea la figura.)

(b) ¿En qué otro punto sobre la circcunferencia es que una recta tangente será paralela a la recta tangente de la parte (a)?



APLICACIONES

65. Pendiente de una carretera Al poniente de Albuquerque, Nuevo México, la Ruta 40 que se dirige al oriente es recta y con un agudo descenso hacia la ciudad. La carretera tiene una pendiente del 6%, lo cual significa que su pendiente es $-\frac{6}{100}$. Manejando en esta carretera, observa por señales de elevación que usted ha descendido una distancia de 1000 pies. ¿Cuál es el cambio en su distancia horizontal?



66. Calentamiento global Algunos científicos piensan que el promedio de la temperatura de la superficie de la Tierra ha estado subiendo constantemente. El promedio de la temperatura de la superficie se puede modelar con

$$T = 0.02t + 15.0$$

donde T es la temperatura en ºC y t es años desde 1950.

(a) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección T?

(b) Use la ecuación para pronosticar el promedio de la temperatura de la superficie de la Tierra en 2050.

67. Dosis de medicamentos Si la dosis recomendada a un adulto para un medicamento es D (en mg), entonces, para determinar la dosis apropiada c para un niño de edad a, los farmacéuticos usan la ecuación

$$c = 0.0417D(a + 1)$$

Suponga que la dosis para un adulto es 200 mg.

(a) Encuentre la pendiente. ¿Qué representa ésta?

(b) ¿Cuál es la dosis para un recién nacido?

68. Mercado de segunda mano La gerente de un mercado de segunda mano en fin de semana sabe, por experiencia del pasado, que si ella cobra x dólares por la renta de espacio en el mercado de segunda mano, entonces el número y de espacios que ella renta está dado por la ecuación $y = 200 - 4x$.

(a) Trace una gráfica de esta ecuación lineal. (Recuerde que el cargo por renta de espacio, así como el número de espacios rentados, deben ser cantidades no negativas ambas.)

(b) ¿Qué representan la pendiente, el punto de intersección y y el punto de intersección x de la gráfica?

69. Costo de producción Un pequeño fabricante de enseres electrodomésticos encuentra que si produce x hornos tostadores por mes, su costo de producción está dado por la ecuación

$$y = 6x + 3000$$

(donde y se mide en dólares).

(a) Trace una gráfica de esta ecuación lineal.

(b) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección y de la gráfica?

70. Escalas de temperatura La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por la ecuación $F = \frac{9}{5}C + 32$.

(a) Complete la tabla para comparar las dos escalas a los valores dados.

(b) Encuentre la temperatura a la que las escalas son iguales. [*Sugerencia:* Suponga que a es la temperatura a la que las escalas son iguales. Haga $F = a$ y $C = a$ y a continuación despeje a.]

C	F
$-30°$	
$-20°$	
$-10°$	
$0°$	
	$50°$
	$68°$
	$86°$

71. Grillos y temperatura Los biólogos han observado que la frecuencia de chirridos de grillos de cierta especie está relacionada con la temperatura, y la relación parece ser casi lineal. Un grillo produce 120 chirridos por minuto a 70ºF y 168 chirridos por minuto a 80ºF.

(a) Encuentre la ecuación lineal que relacione la temperatura t y el número de chirridos por minuto n.

(b) Si los grillos están chirriando a 150 chirridos por minuto, estime la temperatura.

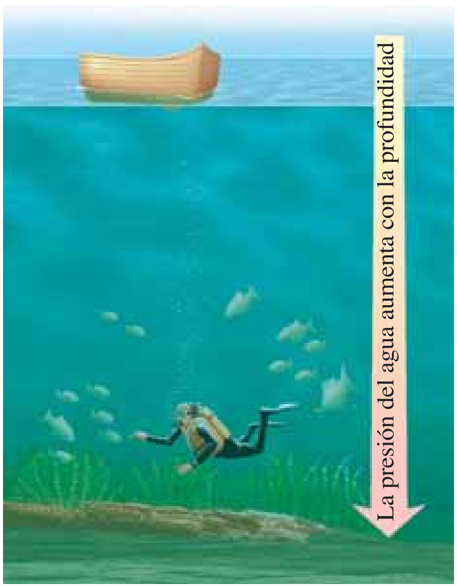
72. Depreciación Un pequeño negocio compra una computadora en $4000. Después de 4 años el valor de la computadora se espera que sea de $200. Para fines de contabilidad, el negocio usa *depreciación lineal* para evaluar el valor de la computadora en un tiempo determinado.

Esto significa que si V es el valor de la computadora en el tiempo t, entonces se usa una ecuación lineal para relacionar V y t.

(a) Encuentre una ecuación lineal que relacione V y t.
(b) Trace una gráfica de esta ecuación lineal.
(c) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección V de la gráfica?
(d) Encuentre el valor depreciado de la computadora 3 años a partir de la fecha de compra.

73. Presión y profundidad En la superficie del océano, la presión del agua es la misma que la del aire que está sobre el agua, 15 lb/pulg.^{2}. Debajo de la superficie, la presión del agua aumenta en 4.34 lb/pulg.^{2} por cada 10 pies de descenso.

(a) Encuentre una ecuación para la relación entre presión y profundidad debajo de la superficie del océano.
(b) Trace una gráfica de esta ecuación lineal.
(c) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección y de la gráfica?
(d) ¿A qué profundidad es de 100 lb/pulg.^{2} la presión?



74. Distancia, rapidez y tiempo Jason y Debbie salen de Detroit a las 2:00 p.m. y manejan a una rapidez constante, viajando hacia al poniente en la carretera I−90. Pasan Ann Arbor, a 40 millas de Detroit, a las 2:50 p.m.

(a) Exprese la distancia recorrida en términos del tiempo transcurrido.
(b) Trace la gráfica de la ecuación de la parte (a).
(c) ¿Cuál es la pendiente de esta recta? ¿Qué representa?

75. Costo de conducir un auto El costo mensual de conducir un auto depende del número de millas recorridas. Lynn encontró que en mayo su costo de conducción fue de \$380 por 480 millas y, en junio, su costo fue de \$460 por 800 millas. Suponga que hay una relación lineal entre el costo mensual C de conducir un auto y la distancia recorrida d.

(a) Encuentre una ecuación lineal que relacione C y d.
(b) Use la parte (a) para predecir el costo de conducir 1500 millas por mes.
(c) Trace la gráfica de la ecuación lineal. ¿Qué representa la pendiente de la recta?
(d) ¿Qué representa el punto de intersección y de la gráfica?
(e) ¿Por qué una relación lineal es un modelo apropiado para esta situación?

76. Costo de manufactura El gerente de una fábrica de muebles encuentra que cuesta \$2200 manufacturar 100 sillas en un día y \$4800 producir 300 sillas en un día.

(a) Suponiendo que la relación entre el costo y el número de sillas producidas sea lineal, encuentre una ecuación que exprese esta relación. A continuación, grafique la ecuación.
(b) ¿Cuál es la pendiente de la recta de la parte (a), y qué representa?
(c) ¿Cuál es el punto de intersección y de esta recta, y qué representa?

DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

77. ¿Qué significa la pendiente? Suponga que la gráfica de la temperatura exterior en cierto tiempo es una recta. ¿Cómo está cambiando el clima si la pendiente de la recta es positiva? ¿Si es negativa? ¿Y si es cero?

78. Puntos colineales Suponga que nos dan las coordenadas de tres puntos en el plano y se desea ver si están en la misma recta. ¿Cómo se puede hacer esto usando pendientes? ¿Usando la Fórmula de la Distancia? ¿Puede usted considerar otro método?

1.11 MODELOS CON EL USO DE VARIACIONES

Variación directa ▶ Variación inversa ▶ Variación conjunta

Cuando los científicos hablan de un modelo matemático para un fenómeno real, con frecuencia se refieren a una ecuación que describe la relación entre dos cantidades. Por ejemplo, el modelo podría describir la forma en que la población de una especie animal varía con el tiempo, o el modo en que la presión de un gas varía a medida que cambia la temperatura. En esta sección estudiamos una clase de modelado llamado *variación.*