Error algebraico	Contraejemplo
$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \cancel{=} \frac{1}{a+b}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2+2}$
$(a+b)^2 \cancel{=} a^2 + b^2$	
$\sqrt{a^2+b^2} \cancel{=} a + b$	
$\frac{a+b}{a} \cancel{=} b$	
$(a^3+b^3)^{1/3} \cancel{=} a + b$	
$a^m/a^n \cancel{=} a^{m/n}$	
$a^{-1/n} \cancel{=} \frac{1}{a^n}$	

106. La forma de una expresión algebraica Una expresión algebraica puede parecer complicada, pero su "forma" siempre es fácil; debe ser una suma, un producto, un cociente o una potencia. Por ejemplo, considere las expresiones siguientes:

$$(1+x^2)^2 + \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^3 \qquad (1+x)\left(1 + \frac{x+5}{1+x^4}\right)$$

$$\frac{5-x^3}{1+\sqrt{1+x^2}} \qquad \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Con elecciones apropiadas para A y B, la primera tiene la forma $A + B$, la segunda AB, la tercera A/B y la cuarta $A^{1/2}$. Reconociendo la forma de una expresión nos ayuda a expandirla, simplificarla o factorizarla correctamente. Encuentre la forma de las siguientes expresiones algebraicas.

(a) $x + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ **(b)** $(1+x^2)(1+x)^3$

(c) $\sqrt[3]{x^4(4x^2+1)}$ **(d)** $\frac{1-2\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x^2}}$

1.5 ECUACIONES

Solución de ecuaciones lineales ▶ Solución de ecuaciones cuadráticas ▶ Otros tipos de ecuaciones

Una ecuación es un enunciado de que dos expresiones matemáticas son iguales. Por ejemplo,

$$3 + 5 = 8$$

es una ecuación. Casi todas las ecuaciones que estudiamos en álgebra contienen variables, que son símbolos (por lo general literales) que representan números. En la ecuación

$$4x + 7 = 19$$

$x = 3$ es una solución de la ecuación $4x + 7 = 19$, porque sustituir $x = 3$ hace verdadera la ecuación:

$x = 3$

$4(3) + 7 = 19$ ✔

la letra x es la variable. Consideramos x como la "incógnita" de la ecuación, y nuestro objetivo es hallar el valor de x que haga que la ecuación sea verdadera. Los valores de la incógnita que hagan que la ecuación sea verdadera se denominan **soluciones** o **raíces** de la ecuación, y el proceso de hallar las soluciones se llama **resolver la ecuación.**

Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones reciben el nombre de **ecuaciones equivalentes**. Para resolver una ecuación, tratamos de hallar una ecuación equivalente más sencilla en la que la variable está sólo en un lado del signo "igual". A continuación veamos las propiedades que usamos para resolver una ecuación. (En estas propiedades, A, B y C representan cualesquiera expresiones algebraicas, y el símbolo $\Leftrightarrow$ significa "es equivalente a".)

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

Propiedad	Descripción
1. $A = B \iff A + C = B + C$	Sumar la misma cantidad a ambos lados de una ecuación da una ecuación equivalente.
2. $A = B \iff CA = CB \quad (C \neq 0)$	Multiplicar ambos lados de una ecuación por la misma cantidad diferente de cero da una ecuación equivalente.

Estas propiedades requieren que el estudiante *ejecute la misma operación en ambos lados de una ecuación* al resolverla. Entonces, si decimos "*sume* −7" al resolver una ecuación, es una forma breve de decir "*sume* −7 a cada lado de la ecuación".

▼ Solución de ecuaciones lineales

El tipo más sencillo de ecuación es una *ecuación lineal*, o ecuación de primer grado, que es una ecuación en la que cada término es una constante o un múltiplo diferente de cero de la variable.

ECUACIONES LINEALES

Una **ecuación lineal** en una variable es una ecuación equivalente a una de la forma

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números reales y x es la variable.

A continuación veamos algunos ejemplos que ilustran la diferencia entre ecuaciones lineales y no lineales.

Ecuaciones lineales	Ecuaciones no lineales	
$4x - 5 = 3$	$x^2 + 2x = 8$	No lineal; contiene el cuadrado de la variable
$2x = \frac{1}{2}x - 7$	$\sqrt{x} - 6x = 0$	No lineal; contiene la raíz cuadrada de la variable
$x - 6 = \frac{x}{3}$	$\frac{3}{x} - 2x = 1$	No lineal; contiene el recíproco de la variable

EJEMPLO 1 | Solución de una ecuación lineal

Resuelva la ecuación $7x - 4 = 3x + 8$.

SOLUCIÓN Resolvemos ésta al cambiarla a una ecuación equivalente con todos los términos que tenga la variable x en un lado y todos los términos constante en el otro.

$$7x - 4 = 3x + 8 \qquad \text{Ecuación dada}$$
$$(7x - 4) + 4 = (3x + 8) + 4 \qquad \text{Sume 4}$$
$$7x = 3x + 12 \qquad \text{Simplifique}$$
$$7x - 3x = (3x + 12) - 3x \qquad \text{Reste } 3x$$
$$4x = 12 \qquad \text{Simplifique}$$
$$\tfrac{1}{4} \cdot 4x = \tfrac{1}{4} \cdot 12 \qquad \text{Multiplique por } \tfrac{1}{4}$$
$$x = 3 \qquad \text{Simplifique}$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 3$:

$x = 3$: LI $= 7(3) - 4 = 17$

$x = 3$: LD $= 3(3) + 8 = 17$

LI = LD ✔

Debido a que es importante VERIFICAR SU RESPUESTA, hacemos esto en muchos de nuestros ejemplos. En estas pruebas, LI quiere decir "lado izquierdo" y LD es "lado derecho" de la ecuación original.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15** ■

En las ciencias, muchas fórmulas involucran varias variables, por lo que es necesario expresar una en términos de otras. En el siguiente ejemplo, resolvemos la ley gravitacional de Newton para una variable.

Ésta es la Ley de Newton de Gravitación Universal. Da la fuerza gravitacional F entre dos masas m y M que están a una distancia r entre sí. La constante G es la constante universal de gravitación.

EJEMPLO 2 | Solución para una variable en términos de otras

Despeje M de la ecuación siguiente.

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

SOLUCIÓN Aun cuando esta ecuación contiene más de una variable, la resolvemos como es usual al aislar M en un lado, tratando a las otras variables como si fueran números.

$$F = \left(\frac{Gm}{r^2}\right)M \qquad \text{Factorice } M \text{ del lado derecho}$$

$$\left(\frac{r^2}{Gm}\right)F = \left(\frac{r^2}{Gm}\right)\left(\frac{Gm}{r^2}\right)M \qquad \text{Multiplique por el recíproco de } \frac{Gm}{r^2}$$

$$\frac{r^2F}{Gm} = M \qquad \text{Simplifique}$$

La solución es $M = \dfrac{r^2F}{Gm}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

EJEMPLO 3 | Despejar una variable en términos de otras

El área superficial A del rectángulo cerrado que se muestra en la Figura 1 puede calcularse a partir de la longitud l, el ancho w y la altura h de acuerdo con la fórmula

$$A = 2lw + 2wh + 2lh$$

Despeje w en términos de las otras variables de esta ecuación.

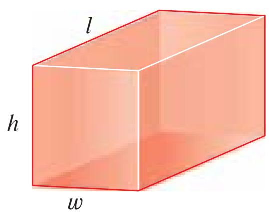


FIGURA 1 Una caja rectangular cerrada

SOLUCIÓN Aun cuando esta ecuación contiene más de una variable, la resolvemos como es usual al aislar w en un lado, tratando las otras variables como si fueran números.

$$A = (2lw + 2wh) + 2lh \qquad \text{Reúna términos que contengan } w$$

$$A - 2lh = 2lw + 2wh \qquad \text{Reste } 2lh$$

$$A - 2lh = (2l + 2h)w \qquad \text{Factorice } w \text{ del lado derecho}$$

$$\frac{A - 2lh}{2l + 2h} = w \qquad \text{Divida entre } 2l + 2h$$

La solución es $w = \dfrac{A - 2lh}{2l + 2h}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

Solución de ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones lineales son ecuaciones de primer grado como $2x + 1 = 5$ o $4 - 3x = 2$. Las ecuaciones cuadráticas son ecuaciones de segundo grado como $x^2 + 2x - 3 = 0$ o $2x^2 + 3 = 5x$.

Ecuaciones cuadráticas

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$3x + 10 = 4x^2$

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} = 0$

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

Algunas ecuaciones cuadráticas pueden resolverse al factorizar y usar las siguientes propiedades básicas de números reales.

PROPIEDAD DE PRODUCTO CERO

$$AB = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad A = 0 \quad \text{o} \quad B = 0$$

Esto significa que si podemos factorizar el lado izquierdo de una ecuación cuadrática (o de otro grado), entonces podemos resolverla igualando a 0 cada factor a la vez. Este método funciona sólo cuando el lado derecho de la ecuación es 0.

EJEMPLO 4 | Solución de una ecuación cuadrática por factorización

Resuelva la ecuación $x^2 + 5x = 24$.

SOLUCIÓN Primero debemos reescribir la ecuación de modo que el lado derecho sea 0.

$$\begin{aligned} x^2 + 5x &= 24 \\ x^2 + 5x - 24 &= 0 && \text{Reste 24} \\ (x-3)(x+8) &= 0 && \text{Factorice} \\ x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 8 &= 0 && \text{Propiedad de Producto Cero} \\ x = 3 \qquad\qquad x &= -8 && \text{Resuelva} \end{aligned}$$

Las soluciones son $x = 3$ y $x = -8$.

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = 3$:

$(3)^2 + 5(3) = 9 + 15 = 24$ ✔

$x = -8$:

$(-8)^2 + 5(-8) = 64 - 40 = 24$ ✔

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **43**

¿Ve usted por qué un lado de la ecuación debe ser 0 en el Ejemplo 4? Factorizar la ecuación como $x(x + 5) = 24$ no nos ayuda a encontrar soluciones, porque 24 se puede factorizar en un número infinito de formas, por ejemplo $6 \cdot 4$, $\frac{1}{2} \cdot 48$, $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot (-60)$, etcétera.

Una ecuación cuadrática de la forma $x^2 - c = 0$, donde c es una constante positiva, se factoriza como $(x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) = 0$, de modo que las soluciones son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$. Con frecuencia abreviamos esto como $x = \pm\sqrt{c}$.

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA SENCILLA

Las soluciones de la ecuación $x^2 = c$ son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$.

EJEMPLO 5 | Solución de ecuaciones cuadráticas sencillas

Resuelva las siguientes ecuaciones.

(a) $x^2 = 5$ **(b)** $(x - 4)^2 = 5$

SOLUCIÓN

(a) Del principio contenido en el cuadro precedente, obtenemos $x = \pm\sqrt{5}$.

(b) También podemos tomar la raíz cuadrada de cada lado de esta ecuación.

$$\begin{aligned} (x-4)^2 &= 5 \\ x - 4 &= \pm\sqrt{5} && \text{Tome la raíz cuadrada} \\ x &= 4 \pm \sqrt{5} && \text{Sume 4} \end{aligned}$$

Las soluciones son $x = 4 + \sqrt{5}$ y $x = 4 - \sqrt{5}$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **51** Y **53**

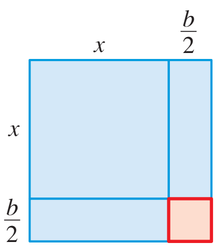
En la página 30 vea cómo reconocer cuando una expresión cuadrática es un cuadrado perfecto.

Completar el cuadrado

El área de la región azul es

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x = x^2 + bx$$

Sume un pequeño cuadrado de área $(b/2)^2$ para "completar" el cuadrado.



Cuando complete el cuadrado, asegúrese que el coeficiente de x^2 sea 1. Si no lo es, se debe factorizar este coeficiente de ambos términos que contengan x:

$$ax^2 + bx = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$$

A continuación complete el cuadrado dentro de los paréntesis. Recuerde que el término sumado dentro de los paréntesis se multiplica por a.

Como vimos en el Ejemplo 5, si una ecuación cuadrática es de la forma $(x \pm a)^2 = c$, entonces podemos resolverla al tomar la raíz cuadrada de cada lado. En una ecuación de esta forma el lado izquierdo es un *cuadrado perfecto*: el cuadrado de una expresión lineal en x. Por lo tanto, si una ecuación cuadrática no se factoriza fácilmente, entonces podemos resolverla usando la técnica de **completar el cuadrado.** Esto significa que sumamos una constante a una expresión para hacerla cuadrado perfecto. Por ejemplo, para hacer que $x^2 - 6x$ sea cuadrado perfecto, debemos sumar 9 porque $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

COMPLETAR EL CUADRADO

Para hacer que $x^2 + bx$ sea un cuadrado perfecto, sume $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, que es el cuadrado de la mitad del coeficiente de x. Esto da el cuadrado perfecto.

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

EJEMPLO 6 | Resolver ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

Resuelva lo siguiente.

(a) $x^2 - 8x + 13 = 0$ **(b)** $3x^2 - 12x + 6 = 0$

SOLUCIÓN

(a)

$x^2 - 8x + 13 = 0$	Ecuación dada
$x^2 - 8x = -13$	Reste 13
$x^2 - 8x + 16 = -13 + 16$	Complete el cuadrado: sume $\left(\frac{-8}{2}\right)^2 = 16$
$(x - 4)^2 = 3$	Cuadrado perfecto
$x - 4 = \pm\sqrt{3}$	Tome la raíz cuadrada
$x = 4 \pm \sqrt{3}$	Sume 4

(b) Después de restar 6 de cada lado de la ecuación, debemos factorizar el coeficiente de x^2 (el 3) del lado izquierdo para poner la ecuación en la forma correcta para completar el cuadrado.

$3x^2 - 12x + 6 = 0$	Ecuación dada
$3x^2 - 12x = -6$	Reste 6
$3(x^2 - 4x) = -6$	Factorice 3 del lado izquierdo

Ahora completamos el cuadrado al sumar $(-2)^2 = 4$ *dentro* de los paréntesis. Como todo dentro de los paréntesis está multiplicado por 3, esto significa que en realidad estamos sumando $3 \cdot 4 = 12$ al lado izquierdo de la ecuación. Entonces, también debemos sumar 12 al lado derecho.

$3(x^2 - 4x + 4) = -6 + 3 \cdot 4$	Complete el cuadrado: sume 4
$3(x - 2)^2 = 6$	Cuadrado perfecto
$(x - 2)^2 = 2$	Divida entre 3
$x - 2 = \pm\sqrt{2}$	Tome la raíz cuadrada
$x = 2 \pm \sqrt{2}$	Sume 2

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **55** Y **59**

Library of Congress

FRANÇOIS VIÈTE (1540-1603) tuvo una exitosa carrera política antes de dedicarse a las matemáticas en los últimos años de su vida. Fue uno de los más afamados matemáticos franceses del siglo XVI. Viète introdujo un nuevo nivel de abstracción en álgebra al usar letras para representar cantidades *conocidas* en una ecuación. Antes de la época de Viète, cada ecuación tenía que ser resuelta por sí misma. Por ejemplo, las ecuaciones cuadráticas

$$3x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$5x^2 - 6x + 4 = 0$$

tenían que ser resueltas por separado completando el cuadrado. La idea de Viète era considerar todas las ecuaciones cuadráticas a la vez escribiendo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c eran cantidades conocidas. De este modo, él hizo posible escribir una *fórmula* (en este caso, la fórmula cuadrática) con a, b y c que pueden usarse para resolver todas esas ecuaciones en un solo golpe.

El genio matemático de Viète resultó ser sumamente valioso durante una guerra entre Francia y España. Para comunicarse con sus tropas, los españoles utilizaban un complicado código que Viète se arregló para descifrarlo. Sin saber el logro de Viète, el rey español Felipe II protestó ante el Papa, diciendo que los franceses estaban usando brujería para leer los mensajes de los españoles.

Podemos usar la técnica de completar el cuadrado para obtener una fórmula para las raíces de la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$.

LA FÓRMULA CUADRÁTICA

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DEMOSTRACIÓN Primero, dividimos entre a cada lado de la ecuación y pasamos la constante al lado derecho, obteniendo

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad \text{Divida entre } a$$

A continuación completamos el cuadrado al sumar $(b/2a)^2$ a cada lado de la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad \text{Complete el cuadrado: sume } \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \qquad \text{Cuadrado perfecto}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Reste } \frac{b}{2a}$$

La fórmula cuadrática podría usarse para resolver las ecuaciones de los Ejemplos 4 y 6. El lector debe realizar los detalles de estos cálculos.

EJEMPLO 7 | Uso de la fórmula cuadrática

Encuentre todas las soluciones de las ecuaciones siguientes.

(a) $3x^2 - 5x - 1 = 0$ **(b)** $4x^2 + 12x + 9 = 0$ **(c)** $x^2 + 2x + 2 = 0$

SOLUCIÓN

(a) En esta ecuación cuadrática $a = 3$, $b = -5$ y $c = -1$.

$b = -5$

$$3x^2 - 5x - 1 = 0$$

$a = 3$ $c = -1$

Por la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

Si se desean aproximaciones, podemos usar una calculadora para obtener

$$x = \frac{5 + \sqrt{37}}{6} \approx 1.8471 \qquad \text{y} \qquad x = \frac{5 - \sqrt{37}}{6} \approx -0.1805$$

(b) Usando la fórmula cuadrática con $a = 4$, $b = 12$ y $c = 9$ dará

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm 0}{8} = -\frac{3}{2}$$

Esta ecuación tiene sólo una solución, $x = -\frac{3}{2}$.

Otro método

$$4x^2 + 12x + 9 = 0$$
$$(2x + 3)^2 = 0$$
$$2x + 3 = 0$$
$$x = -\tfrac{3}{2}$$

(c) Usando la fórmula cuadrática, con $a = 1$, $b = 2$ y $c = 2$ resulta

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Como el cuadrado de cualquier número real es no negativo, $\sqrt{-1}$ no está definido en el sistema de números reales. La ecuación no tiene solución real.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **65, 69** Y **75** ■

En la Sección 3.5 estudiamos el sistema de números complejos, en el que existen las raíces cuadradas de números negativos. La ecuación del Ejemplo 7(c) tiene soluciones en el sistema de números complejos.

La cantidad $b^2 - 4ac$ que aparece bajo el signo de raíz cuadrada en la fórmula cuadrática se denomina *discriminante* de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y está dada por el símbolo D. Si $D < 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ no está definida y la ecuación cuadrática no tiene solución real, como en el Ejemplo 7(c). Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene sólo una solución real, como en el Ejemplo 7(b). Por último, si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas, como en el Ejemplo 7(a). El recuadro siguiente resume estas observaciones.

EL DISCRIMINANTE

El **discriminante** de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ es $D = b^2 - 4ac$.

1. Si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
2. Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene exactamente una solución real.
3. Si $D < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real.

EJEMPLO 8 | Uso del discriminante

Use el discriminante para determinar cuántas soluciones reales tiene cada ecuación.

(a) $x^2 + 4x - 1 = 0$ **(b)** $4x^2 - 12x + 9 = 0$ **(c)** $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 0$

SOLUCIÓN

(a) El discriminante es $D = 4^2 - 4(1)(-1) = 20 > 0$, por lo cual la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

(b) El discriminante es $D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$, por lo cual la ecuación tiene una solución real.

(c) El discriminante es $D = (-2)^2 - 4\left(\frac{1}{3}\right)4 = -\frac{4}{3} < 0$, por lo cual la ecuación no tiene solución real.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **79, 81** Y **83** ■

A continuación consideremos una situación real que puede ser modelada por una ecuación cuadrática.

EJEMPLO 9 | Trayectoria de un proyectil

Esta fórmula depende del hecho de que la aceleración debida a la gravedad es constante cerca de la superficie terrestre. Aquí despreciamos el efecto de la resistencia del aire.

Un objeto lanzado o disparado verticalmente hacia arriba a una velocidad inicial v_0 pies/s alcanzará una altura de h pies después de t segundos, donde h y t están relacionadas por la fórmula

$$h = -16t^2 + v_0 t$$

Suponga que se dispara una bala verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 800 pies/s. Su trayectoria se ilustra en la Figura 2.

(a) ¿Cuándo caerá la bala al nivel del suelo?

(b) ¿Cuándo alcanza una altura de 6400 pies?

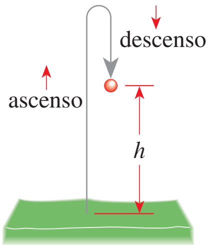
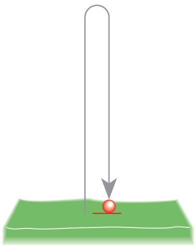
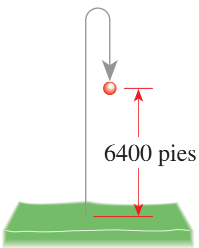
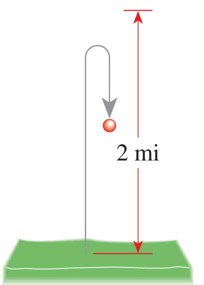
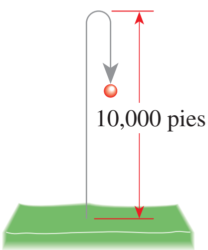


FIGURA 2









(c) ¿Cuándo alcanza una altura de 2 millas?

(d) ¿Cuál es la altura del punto más alto al que llega la bala?

SOLUCIÓN Como la velocidad inicial en este caso es $v_0 = 800$ pies/s, la fórmula es

$$h = -16t^2 + 800t$$

(a) El nivel del suelo corresponde a $h = 0$, de modo que debemos resolver la ecuación

$$\begin{aligned} 0 &= -16t^2 + 800t && \text{Haga } h = 0 \\ 0 &= -16t(t - 50) && \text{Factorice} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $t = 0$ o $t = 50$. Esto significa que la bala arranca ($t = 0$) al nivel del suelo y regresa a éste después de 50 segundos.

(b) Haciendo $h = 6400$ da la ecuación

$$\begin{aligned} 6400 &= -16t^2 + 800t && \text{Haga } h = 6400 \\ 16t^2 - 800t + 6400 &= 0 && \text{Todos los términos al lado izquierdo} \\ t^2 - 50t + 400 &= 0 && \text{Divida entre 16} \\ (t - 10)(t - 40) &= 0 && \text{Factorice} \\ t = 10 \qquad \text{or} \qquad t &= 40 && \text{Resuelva} \end{aligned}$$

La bala llega a 6400 pies después de 10 s (en su ascenso) y otra vez después de 40 s (en su descenso a tierra).

(c) Dos millas es $2 \times 5280 = 10,560$ pies.

$$\begin{aligned} 10,560 &= -16t^2 + 800t && \text{Haga } h = 10,560 \\ 16t^2 - 800t + 10,560 &= 0 && \text{Todos los términos al lado izquierdo} \\ t^2 - 50t + 660 &= 0 && \text{Divida entre 16} \end{aligned}$$

El discriminante de esta ecuación es $D = (-50)^2 - 4(660) = -140$, que es negativo. Entonces, la ecuación no tiene solución real. La bala nunca llega a una altura de 2 millas.

(d) Cada altura a la que llega la bala es alcanzada dos veces, una vez en su ascenso y una vez en su descenso. La única excepción es el punto más alto de su trayectoria, que se alcanza una sola vez. Esto significa que para el valor más alto de h, la siguiente ecuación tiene sólo una solución para t:

$$\begin{aligned} h &= -16t^2 + 800t \\ 16t^2 - 800t + h &= 0 && \text{Alterne al lado izquierdo} \end{aligned}$$

Esto a su vez significa que el discriminante D de la ecuación es 0, de modo que

$$\begin{aligned} D = (-800)^2 - 4(16)h &= 0 \\ 640,000 - 64h &= 0 \\ h &= 10,000 \end{aligned}$$

La máxima altura alcanzada es 10,000 pies.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **111** ■

▼ Otros tipos de ecuaciones

Hasta aquí hemos aprendido a resolver ecuaciones lineales y cuadráticas. A continuación estudiaremos otros tipos de ecuaciones, incluyendo las que contienen potencias superiores, expresiones fraccionarias y radicales.

EJEMPLO 10 | Una ecuación que contiene expresiones fraccionarias

Resuelva la ecuación $\dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x+2} = 2$.

SOLUCIÓN Eliminamos los denominadores al multiplicar cada lado por el mínimo común denominador.

$\left(\dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x+2}\right)x(x+2) = 2x(x+2)$	Multiplique por el MCD $x(x+2)$
$3(x+2) + 5x = 2x^2 + 4x$	Expanda
$8x + 6 = 2x^2 + 4x$	Expanda el lado izquierdo
$0 = 2x^2 - 4x - 6$	Reste $8x + 6$
$0 = x^2 - 2x - 3$	Divida entre 2 ambos lados
$0 = (x-3)(x+1)$	Factorice
$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$	Propiedad de Producto Cero
$x = 3 \qquad\qquad x = -1$	Resuelva

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = 3$:

$$\text{LI} = \frac{3}{3} + \frac{5}{3+2} = 1 + 1 = 2$$

$$\text{LD} = 2$$

$$\text{LI} = \text{LD} \ ✔$$

$x = -1$:

$$\text{LI} = \frac{3}{-1} + \frac{5}{-1+2} = -3 + 5 = 2$$

$$\text{LD} = 2$$

$$\text{LI} = \text{LD} \ ✔$$

Debemos verificar nuestras respuestas porque multiplicar por una expresión que contenga la variable puede introducir soluciones extrañas. De *Verifique sus respuestas* vemos que las soluciones son $x = 3$ y -1.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **85**

Cuando resuelva una ecuación que contenga radicales, debe tener especial cuidado para verificar sus respuestas finales. El siguiente ejemplo demuestra el porqué.

EJEMPLO 11 | Una ecuación que contiene un radical

Resuelva la ecuación $2x = 1 - \sqrt{2 - x}$.

SOLUCIÓN Para eliminar la raíz cuadrada, primero la aislamos en un lado del signo igual y luego elevamos al cuadrado:

$2x - 1 = -\sqrt{2-x}$	Reste 1
$(2x-1)^2 = 2 - x$	Eleve al cuadrado cada lado
$4x^2 - 4x + 1 = 2 - x$	Expanda el lado izquierdo
$4x^2 - 3x - 1 = 0$	Sume $-2 + x$
$(4x+1)(x-1) = 0$	Factorice
$4x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0$	Propiedad de Producto Cero
$x = -\frac{1}{4} \qquad\qquad x = 1$	Resuelva

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = -\frac{1}{4}$:

$$\text{LI} = 2\left(-\tfrac{1}{4}\right) = -\tfrac{1}{2}$$

$$\text{LD} = 1 - \sqrt{2 - \left(-\tfrac{1}{4}\right)} = 1 - \sqrt{\tfrac{9}{4}} = 1 - \tfrac{3}{2} = -\tfrac{1}{2}$$

$$\text{LI} = \text{LD} \ ✔$$

$x = 1$:

$$\text{LI} = 2(1) = 2$$

$$\text{LD} = 1 - \sqrt{2-1} = 1 - 1 = 0$$

$$\text{LI} \neq \text{LD} \ ✗$$

Los valores $x = -\frac{1}{4}$ y $x = 1$ son sólo soluciones potenciales. Debemos verificarlas para ver si satisfacen la ecuación original. De *Verifique sus respuestas* vemos que $x = -\frac{1}{4}$ es una solución pero $x = 1$ no lo es. La única solución es $x = -\frac{1}{4}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **91**

Cuando resolvamos una ecuación, podemos terminar con una o más **soluciones extrañas,** es decir, soluciones potenciales que no satisfacen la ecuación original. En el Ejemplo 11 el valor $x = 1$ es una solución extraña. Las soluciones extrañas pueden ser introducidas cuando elevamos al cuadrado cada lado de una ecuación porque la operación de elevar al cuadrado puede convertir una ecuación falsa en una verdadera. Por ejemplo $-1 \neq 1$, pero $(-1)^2 = 1^2$. Entonces, la ecuación elevada al cuadrado puede ser verdadera para más valores de la variable que la ecuación original. Ésta es la razón por la que siempre deben verificarse las respuestas para asegurarse que cada una de ellas satisfaga la ecuación original.

Una ecuación de la forma $aW^2 + bW + c = 0$, donde W es una expresión algebraica, es una ecuación de **tipo cuadrático.** Resolvemos ecuaciones de tipo cuadrático al sustituir por la expresión algebraica, como vemos en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 12 | Una ecuación de cuarto grado de tipo cuadrático

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$.

SOLUCIÓN Si hacemos $W = x^2$, entonces obtenemos una ecuación cuadrática con la nueva variable W:

$$(x^2)^2 - 8x^2 + 8 = 0 \qquad \text{Escriba } x^4 \text{ como } (x^2)^2$$

$$W^2 - 8W + 8 = 0 \qquad \text{Sea } W = x^2$$

$$W = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\cdot 8}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{2} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

$$x^2 = 4 \pm 2\sqrt{2} \qquad W = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Por lo tanto, hay cuatro soluciones:

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}, \qquad -\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}, \qquad -\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

Usando una calculadora, obtenemos las aproximaciones $x \approx 2.61, 1.08, -2.61, -1.08$.

AHORA INTENTE HACER EL EJECICIO **95**

EJEMPLO 13 | Una ecuación con potencias fraccionarias

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x^{1/3} + x^{1/6} - 2 = 0$.

SOLUCIÓN Esta ecuación es del tipo cuadrático porque si hacemos $W = x^{1/6}$, entonces $W^2 = (x^{1/6})^2 = x^{1/3}$.

$$x^{1/3} + x^{1/6} - 2 = 0$$

$$W^2 + W - 2 = 0 \qquad \text{Sea } W = x^{1/6}$$

$$(W - 1)(W + 2) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$W - 1 = 0 \quad \text{o} \quad W + 2 = 0 \qquad \text{Propiedad de Producto Cero}$$

$$W = 1 \qquad W = -2 \qquad \text{Resuelva}$$

$$x^{1/6} = 1 \qquad x^{1/6} = -2 \qquad W = x^{1/6}$$

$$x = 1^6 = 1 \qquad x = (-2)^6 = 64 \qquad \text{Tome la 6a. potencia}$$

De *Verifique sus respuestas* vemos que $x = 1$ es una solución pero $x = 64$ no lo es. La solución es $x = 1$.

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = 1$:

LI $= 1^{1/3} + 1^{1/6} - 2 = 0$

LD $= 0$

LI $=$ LD ✔

$x = 64$:

LI $= 64^{1/3} + 64^{1/6} - 2$

$= 4 + 2 - 2 = 4$

LD $= 0$

LI $\neq$ LD ✗

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **99**

Al resolver ecuaciones que contengan valores absolutos, por lo general tomamos casos.

EJEMPLO 14 | Una ecuación con valor absoluto

Resuelva la ecuación $|2x - 5| = 3$.

SOLUCIÓN Por la definición de valor absoluto, $|2x - 5| = 3$ es equivalente a

$$\begin{array}{rclcrcl} 2x - 5 &=& 3 & \text{o} & 2x - 5 &=& -3 \\ 2x &=& 8 & & 2x &=& 2 \\ x &=& 4 & & x &=& 1 \end{array}$$

Las soluciones son $x = 1$, $x = 4$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **105**

1.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. *¿Verdadero o falso?*
   - **(a)** Sumar el mismo número a cada lado de una ecuación siempre da una ecuación equivalente.
   - **(b)** Multiplicar cada lado de una ecuación por el mismo número siempre da una ecuación equivalente.
   - **(c)** Elevar al cuadrado cada lado de una ecuación siempre da una ecuación equivalente.

2. Explique cómo usaría cada método para resolver la ecuación $x^2 - 4x - 5 = 0$.
   - **(a)** Por factorización:_______
   - **(b)** Completando el cuadrado:______
   - **(c)** Usando la fórmula cuadrática:_____

3. **(a)** Las soluciones de la ecuación $x^2(x - 4) = 0$ son________.
   - **(b)** Para resolver la ecuación $x^3 - 4x^2 = 0$, ________el lado izquierdo.

4. Resuelva la ecuación $\sqrt{2x} + x = 0$ con los siguientes pasos.
   - **(a)** Aislar el radical:___________.
   - **(b)** Elevar al cuadrado ambos lados:___________.
   - **(c)** Las soluciones de la ecuación cuadrática resultante son_______.
   - **(d)** La(s) solución(es) que satisface la ecuación original es (son)________.

5. La ecuación $(x + 1)^2 - 5(x + 1) + 6 = 0$ es del tipo_________. Para resolver la ecuación, hacemos $W =$ ____. La ecuación cuadrática resultante es ________.

6. La ecuación $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ es del tipo_______.

   Para resolver la ecuación, hacemos $W =$ _____.

   La ecuación cuadrática resultante es _________.

HABILIDADES

7-10 ■ Determine si el valor dado es una solución de la ecuación.

7. $4x + 7 = 9x - 3$
   (a) $x = -2$ **(b)** $x = 2$

8. $1 - [2 - (3 - x)] = 4x - (6 + x)$
   (a) $x = 2$ **(b)** $x = 4$

9. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x - 4} = 1$
   (a) $x = 2$ **(b)** $x = 4$

10. $\dfrac{x^{3/2}}{x - 6} = x - 8$
    (a) $x = 4$ **(b)** $x = 8$

11-28 ■ La ecuación dada es lineal o equivalente a una ecuación lineal. Resuelva la ecuación.

11. $2x + 7 = 31$
12. $5x - 3 = 4$
13. $\frac{1}{2}x - 8 = 1$
14. $3 + \frac{1}{3}x = 5$
15. $-7w = 15 - 2w$
16. $5t - 13 = 12 - 5t$
17. $\frac{1}{2}y - 2 = \frac{1}{3}y$
18. $\dfrac{z}{5} = \dfrac{3}{10}z + 7$
19. $2(1 - x) = 3(1 + 2x) + 5$
20. $\dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{2}(y - 3) = \dfrac{y + 1}{4}$
21. $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x - 5 = 0$
22. $2x - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x + 1}{4} = 6x$
23. $\dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{3x} + 1$
24. $\dfrac{2x - 1}{x + 2} = \dfrac{4}{5}$
25. $\dfrac{3}{x + 1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3x + 3}$
26. $\dfrac{4}{x - 1} + \dfrac{2}{x + 1} = \dfrac{35}{x^2 - 1}$
27. $(t - 4)^2 = (t + 4)^2 + 32$
28. $\sqrt{3}x + \sqrt{12} = \dfrac{x + 5}{\sqrt{3}}$

29-42 ■ De las siguientes ecuaciones, despeje la variable indicada.

29. $PV = nRT$; despeje R
30. $F = G\dfrac{mM}{r^2}$; despeje m

31. $P = 2l + 2w$; despeje w

32. $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$; despeje R_1

33. $\dfrac{ax + b}{cx + d} = 2$; despeje x

34. $a - 2[b - 3(c - x)] = 6$; despeje x

35. $a^2x + (a - 1) = (a + 1)x$; despeje x

36. $\dfrac{a + 1}{b} = \dfrac{a - 1}{b} + \dfrac{b + 1}{a}$; despeje a

37. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; despeje r

38. $F = G\dfrac{mM}{r^2}$; despeje r

39. $a^2 + b^2 = c^2$; despeje b

40. $A = P\left(1 + \dfrac{i}{100}\right)^2$; despeje i

41. $h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$; despeje t

42. $S = \dfrac{n(n + 1)}{2}$; despeje n

43-54 ■ Resuelva la ecuación por factorización.

43. $x^2 + x - 12 = 0$

44. $x^2 + 3x - 4 = 0$

45. $x^2 - 7x + 12 = 0$

46. $x^2 + 8x + 12 = 0$

47. $4x^2 - 4x - 15 = 0$

48. $2y^2 + 7y + 3 = 0$

49. $3x^2 + 5x = 2$

50. $6x(x - 1) = 21 - x$

51. $2x^2 = 8$

52. $3x^2 - 27 = 0$

53. $(3x + 2)^2 = 10$

54. $(2x - 1)^2 = 8$

55-62 ■ Resuelva la ecuación completando el cuadrado.

55. $x^2 + 2x - 5 = 0$

56. $x^2 - 4x + 2 = 0$

57. $x^2 - 6x - 11 = 0$

58. $x^2 + 3x - \frac{7}{4} = 0$

59. $2x^2 + 8x + 1 = 0$

60. $3x^2 - 6x - 1 = 0$

61. $4x^2 - x = 0$

62. $x^2 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$

63-78 ■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación cuadrática.

63. $x^2 - 2x - 15 = 0$

64. $x^2 + 5x - 6 = 0$

65. $x^2 - 7x + 10 = 0$

66. $x^2 + 30x + 200 = 0$

67. $2x^2 + x - 3 = 0$

68. $3x^2 + 7x + 4 = 0$

69. $3x^2 + 6x - 5 = 0$

70. $x^2 - 6x + 1 = 0$

71. $z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{9}{16} = 0$

72. $2y^2 - y - \frac{1}{2} = 0$

73. $4x^2 + 16x - 9 = 0$

74. $0 = x^2 - 4x + 1$

75. $w^2 = 3(w - 1)$

76. $3 + 5z + z^2 = 0$

77. $10y^2 - 16y + 5 = 0$

78. $25x^2 + 70x + 49 = 0$

79-84 ■ Use el discriminante para determinar el número de soluciones reales de la ecuación. No resuelva la ecuación.

79. $x^2 - 6x + 1 = 0$

80. $3x^2 = 6x - 9$

81. $x^2 + 2.20x + 1.21 = 0$

82. $x^2 + 2.21x + 1.21 = 0$

83. $4x^2 + 5x + \frac{13}{8} = 0$

84. $x^2 + rx - s = 0 \quad (s > 0)$

85-108 ■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación.

85. $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 2} = \dfrac{5}{4}$

86. $\dfrac{10}{x} - \dfrac{12}{x - 3} + 4 = 0$

87. $\dfrac{x^2}{x + 100} = 50$

88. $\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{2}{x^2} = 0$

89. $\dfrac{x + 5}{x - 2} = \dfrac{5}{x + 2} + \dfrac{28}{x^2 - 4}$

90. $\dfrac{x}{2x + 7} - \dfrac{x + 1}{x + 3} = 1$

91. $\sqrt{2x + 1} + 1 = x$

92. $\sqrt{5 - x} + 1 = x - 2$

93. $2x + \sqrt{x + 1} = 8$

94. $\sqrt{\sqrt{x - 5} + x} = 5$

95. $x^4 - 13x^2 + 40 = 0$

96. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

97. $2x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

98. $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$

99. $x^{4/3} - 5x^{2/3} + 6 = 0$

100. $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} - 4 = 0$

101. $4(x + 1)^{1/2} - 5(x + 1)^{3/2} + (x + 1)^{5/2} = 0$

102. $x^{1/2} + 3x^{-1/2} = 10x^{-3/2}$

103. $x^{1/2} - 3x^{1/3} = 3x^{1/6} - 9$

104. $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

105. $|3x + 5| = 1$

106. $|2x| = 3$

107. $|x - 4| = 0.01$

108. $|x - 6| = -1$

APLICACIONES

109-110 ■ **Problemas de cuerpos en caída** Suponga que un cuerpo se deja caer desde una altura h_0 sobre el suelo. Entonces su altura después de t segundos está dada por $h = 16t^2 + h_0$, donde h se mide en pies. Use esta información para resolver el problema.

109. Si una pelota se deja caer desde 288 pies sobre el suelo, ¿cuánto tarda en llegar al nivel del suelo?

110. Una pelota se deja caer desde lo alto de un edificio de 96 pies de alto.

(a) ¿Cuánto tardará la pelota en caer la mitad de la distancia al nivel del suelo?

(b) ¿Cuánto tardará en caer el suelo?

111-112 ■ **Problemas de cuerpos en caída** Use la fórmula $h = -16t^2 + v_0 t$ que se estudia en el Ejemplo 9.

111. Una pelota se lanza directamente hacia arriba a una velocidad inicial de $v_0 = 40$ pies/s.

(a) ¿Cuándo llega la pelota a una altura de 24 pies?

(b) ¿Cuándo llega a una altura de 48 pies?

(c) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

(d) ¿Cuándo alcanza la pelota el punto más alto de su trayectoria?

(e) ¿Cuándo cae al suelo?

112. ¿Con qué rapidez debe ser lanzada hacia arriba una pelota para que alcance una altura máxima de 100 pies? [*Sugerencia:* Use el discriminante de la ecuación $16t^2 - v_0 t + h = 0$.]

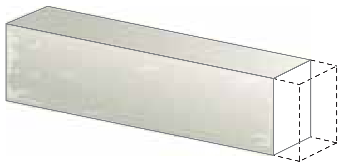
113. **Contracción en vigas de concreto** A medida que el concreto se seca, se contrae; cuanto más alto es el contenido de agua, mayor es la contracción. Si una viga de concreto tiene un contenido de agua de w kg/m^3, entonces se contraerá con un factor

$$S = \frac{0.032w - 2.5}{10{,}000}$$

donde S es la fracción de la longitud original de la viga que desaparece debido a la contracción.

(a) Una viga de 12.025 m de largo es vaciada en concreto que contiene 250 kg/m^3 de agua. ¿Cuál es el factor de contracción S? ¿Qué largo tendrá la viga cuando se haya secado?

(b) Una viga mide 10.014 m de largo cuando está húmeda. Deseamos que se contraiga a 10.009 m, de modo que el factor de contracción sea $S = 0.00050$. ¿Qué contenido de agua dará esta cantidad de contracción?



114. La ecuación de lentes Si F es la longitud focal de un lente convexo y un objeto se coloca a una distancia x desde el lente, entonces su imagen estará a una distancia y del lente, donde F, x y y están relacionadas por la *ecuación de lentes*

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Suponga que un lente tiene una longitud focal de 4.8 cm y que la imagen de un objeto está 4 cm más cerca del lente que el objeto mismo. ¿A qué distancia del lente está el objeto?

115. Población de peces La población de peces de cierto lago sube y baja de acuerdo con la fórmula

$$F = 1000(30 + 17t - t^2)$$

Aquí F es el número de peces en el tiempo t, donde t se mide en años desde el 1 de enero de 2002, cuando la población de peces se estimó por primera vez.

(a) ¿En qué fecha la población de peces será otra vez la misma de como era el 1 de enero de 2002?

(b) ¿Antes de qué fecha habrán muerto todos los peces del lago?

116. Población de peces Un gran estanque es abastecido de peces. La población P de peces está modelada con la fórmula $P = 3t + 10\sqrt{t} + 140$, donde t es el número de días desde que los peces fueron introducidos en el estanque. ¿Cuántos días tardará la población de peces en llegar a 500?

117. Utilidades Un fabricante de aparatos pequeños encuentra que la utilidad P (en dólares), generada por producir x hornos de microondas por semana, está dada por la fórmula $P = \frac{1}{10}x(300 - x)$ siempre que $0 \le x \le 200$. ¿Cuántos hornos deben ser fabricados en una semana determinada para generar una utilidad de \$1250?

118. Gravedad Si un segmento imaginario de recta se traza entre los centros de la Tierra y la Luna, entonces la fuerza F gravitacional neta que actúa sobre un objeto situado sobre este segmento de recta es

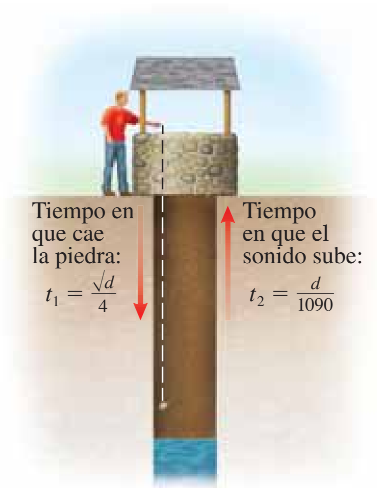
$$F = \frac{-K}{x^2} + \frac{0.012K}{(239 - x)^2}$$

donde $K > 0$ es una constante y x es la distancia del objeto desde el centro de la Tierra, medida en miles de millas. ¿A qué distancia del centro de la Tierra está el "punto muerto" donde no hay fuerza gravitacional neta que actúe sobre el objeto? (Exprese su respuesta a las mil millas más cercanas.)

119. Profundidad de un pozo Un método para determinar la profundidad de un pozo es dejar caer en él una piedra, y luego medir el tiempo que tarda la caída hasta que se escucha el ruido de la piedra al tocar el agua. Si d es la profundidad del pozo (en pies) y t_1 es el tiempo (en segundos) que tarda la piedra en caer, entonces $d = 16t_1^2$, de modo que $t_1 = \sqrt{d}/4$. Ahora, si t_2 es el tiempo que tarda el sonido en regresar, entonces $d = 1090t_2$ porque la velocidad del sonido es 1090 pies/s. Por lo tanto, $t_2 = d/1090$. Así, el tiempo total transcurrido entre dejar caer la piedra y escuchar el ruido cuando cae es

$$t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{d}}{4} + \frac{d}{1090}$$

¿Cuál es la profundidad del pozo si su tiempo total es 3 s?



DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

120. Una familia de ecuaciones La ecuación

$$3x + k - 5 = kx - k + 1$$

es en realidad una **familia de ecuaciones**, porque para cada valor de k obtenemos una ecuación diferente con la incógnita x. La letra k se llama **parámetro** para esta familia. ¿Qué valor debemos escoger para k para hacer que el valor determinado de x sea una solución de la ecuación resultante?

(a) $x = 0$ **(b)** $x = 1$ **(c)** $x = 2$

121. ¿Demostración de que $0 = 1$? Los siguientes pasos parecen dar ecuaciones equivalentes, que parecen demostrar que $1 = 0$. Encuentre el error.

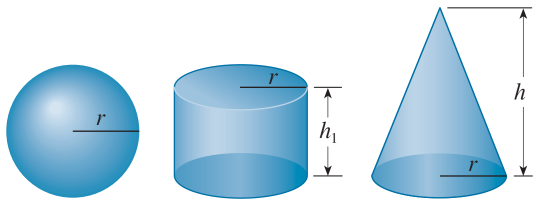
$x = 1$	Dada
$x^2 = x$	Multiplique por x
$x^2 - x = 0$	Reste x
$x(x-1) = 0$	Factorice
$\dfrac{x(x-1)}{x-1} = \dfrac{0}{x-1}$	Divida entre $x - 1$
$x = 0$	Simplifique
$1 = 0$	Dada $x = 1$

122. Volúmenes de sólidos La esfera, el cilindro y el cono que se ven a continuación tienen todos ellos el mismo radio r y el mismo volumen V.

(a) Use las fórmulas de volumen dadas al final de este libro, para demostrar que

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2 h_1 \qquad \text{y} \qquad \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h_2$$

(b) De estas ecuaciones despeje h_1 y h_2.



123. Relación entre raíces y coeficientes La fórmula cuadrática nos da las raíces de una ecuación cuadrática a partir de sus coeficientes. También podemos obtener los coeficientes a partir de sus raíces. Por ejemplo, encuentre las raíces de la ecuación $x^2 - 9x + 20 = 0$ y demuestre que el producto de las raíces es el término constante 20 y la suma de las raíces es 9, el negativo del coeficiente de x. Demuestre que la misma relación entre raíces y coeficientes se cumple para las ecuaciones siguientes:

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

Use la fórmula cuadrática para demostrar que, en general, si la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ tiene raíces r_1 y r_2, entonces $c = r_1 r_2$ y $b = -(r_1 + r_2)$.

124. Resolver una ecuación en formas diferentes En esta sección hemos aprendido varias formas diferentes de resolver una ecuación. Algunas ecuaciones pueden abordarse en más de un método. Por ejemplo, la ecuación $x - \sqrt{x} - 2 = 0$ es de tipo cuadrático. Podemos resolverla haciendo $\sqrt{x} = u$ y $x = u^2$, y factorizando. O bien, podríamos despejar $\sqrt{x}$, elevar al cuadrado cada lado y luego resolver la ecuación cuadrática resultante. Resuelva las siguientes ecuaciones usando ambos métodos indicados, y demuestre que obtiene las mismas respuestas finales.

(a) $x - \sqrt{x} - 2 = 0$ tipo cuadrático; despeje el radical y eleve al cuadrado

(b) $\dfrac{12}{(x-3)^2} + \dfrac{10}{x-3} + 1 = 0$ tipo cuadrático; multiplique por el MCD

1.6 MODELADO CON ECUACIONES

Construcción y uso de modelos ▶ Problemas acerca de interés ▶ Problemas de área o longitud ▶ Problemas de mezclas ▶ Problemas del tiempo necesario para realizar un trabajo ▶ Problemas de distancia, rapidez y tiempo

Numerosos problemas en ciencias, economía, finanzas, medicina y otros muchos campos se pueden convertir en problemas de álgebra; ésta es una razón por la que el álgebra es tan útil. En esta sección usamos ecuaciones como modelos matemáticos para resolver problemas reales.

▼ Construcción y uso de modelos

Usaremos las siguientes guías para ayudarnos a formular ecuaciones que modelen situaciones descritas en palabras. Para demostrar la forma en que estas guías pueden ayudar a formular ecuaciones, téngalas en cuenta al trabajar cada ejemplo de esta sección.

GUÍA PARA MODELAR CON ECUACIONES

1. **Identifique la variable.** Identifique la cantidad que el problema le pide hallar. En general, esta cantidad puede ser determinada por una cuidadosa lectura de la pregunta que se plantea al final del problema. Después **introduzca notación** para la variable (llámela x o alguna otra letra).
2. **Transforme palabras en álgebra.** De nuevo lea cada oración del problema y exprese, en términos de la variable que haya definido en el Paso 1, todas las cantidades mencionadas en el problema. Para organizar esta información, a veces es útil **trazar un diagrama** o **hacer una tabla.**
3. **Formule el modelo.** Encuentre el dato de importancia decisiva en el problema, que dé una relación entre las expresiones que haya citado en el Paso 2. **Formule una ecuación** (o **modelo**) que exprese esta relación.
4. **Resuelva la ecuación y compruebe su respuesta.** Resuelva la ecuación, verifique su respuesta, y exprésela como una oración que conteste la pregunta planteada en el problema.

El siguiente ejemplo ilustra la forma en que se usa esta guía para convertir un "problema de palabras" en lenguaje de álgebra.

EJEMPLO 1 | Rentar un auto

Una compañía de renta de autos cobra \$30 al día y \$0.15 por milla para rentar un auto. Helen renta un auto durante dos días y su cuenta llega a \$108. ¿Cuántas millas recorrió?

SOLUCIÓN

Identifique la variable. Nos piden hallar el número de millas que Helen ha recorrido. Por tanto, hacemos

$$x = \text{número de millas recorridas}$$

Convierta las palabras en álgebra. Ahora convertimos toda la información dada en el problema a un lenguaje de álgebra.

En palabras	En álgebra
Número de millas recorridas	x
Costo del recorrido (a \$0.15 por milla)	$0.15x$
Costo diario (a \$30 por día)	$2(30)$

Formule el modelo. Ahora proponemos el modelo.

$$\text{costo del recorrido} + \text{costo diario} = \text{costo total}$$

$$0.15x + 2(30) = 108$$

Resuelva. Ahora despejamos x.

$$0.15x = 48 \qquad \text{Reste 60}$$

$$x = \frac{48}{0.15} \qquad \text{Divida entre 0.15}$$

$$x = 320 \qquad \text{Con calculadora}$$

Helen manejó 320 millas su auto rentado.

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

costo total = costo del recorrido + costo diario

$= 0.15(320) + 2(30)$

$= 108$ ✔

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 19 ■

En los ejemplos y ejercicios que siguen, construimos ecuaciones que modelan problemas en muchas situaciones reales diferentes.

▼ Problemas acerca de interés

Cuando usted pide un préstamo en un banco o cuando un banco le "pide prestado" a usted al mantener el dinero en una cuenta de ahorros, quien pide el préstamo en este caso debe pagar por el privilegio de usar el dinero. La cuota que se paga se llama **interés.** El tipo más básico de interés es el **interés simple,** que es precisamente un porcentaje anual de la cantidad total solicitada en préstamo o depositada. La cantidad de un préstamo o depósito se llama **principal** P. El porcentaje anual pagado por el uso de este dinero es la **tasa de interés** r. Usaremos la variable t para representar el número de años que el dinero está en depósito y la variable I para representar el interés total ganado. La siguiente **fórmula de interés simple** da la cantidad de interés I ganado cuando un principal P es depositado durante t años a una tasa de interés r.

$$\boxed{I = Prt}$$

Cuando use esta fórmula, recuerde convertir el porcentaje r a decimal. Por ejemplo, en forma decimal, 5% es 0.05. Entonces, a una tasa de interés de 5%, el interés pagado sobre un depósito de \$1000 en un período de 3 años es $I = Prt = 1000(0.05)(3) = \$150$.

EJEMPLO 2 | Interés sobre una inversión

María hereda \$100,000 y los invierte en dos certificados de depósito. Uno de los certificados paga 6% y el otro paga $4\frac{1}{2}\%$ de interés simple al año. Si el interés total de María es \$5025 al año, ¿cuánto dinero se invierte a cada una de las tasas de interés?

SOLUCIÓN

Identifique la variable. El problema pide la cantidad que ella ha invertido a cada una de las tasas. Por lo tanto, hacemos

$$x = \text{la cantidad invertida al } 6\%$$

Convierta las palabras en álgebra. Como la herencia total que recibió María es \$100,000, se deduce que ella invirtió $100{,}000 - x$ al $4\frac{1}{2}\%$. Convertimos toda la información dada en lenguaje de álgebra.

En palabras	En álgebra
Cantidad invertida al 6%	x
Cantidad invertida al $4\frac{1}{2}\%$	$100{,}000 - x$
Cantidad ganada al 6%	$0.06x$
Cantidad ganada al $4\frac{1}{2}\%$	$0.045(100{,}000 - x)$

Formule el modelo. Usamos el dato de que el interés total de María es \$5025 para proponer el modelo.

$$\boxed{\text{interés al } 6\%} + \boxed{\text{interés al } 4\tfrac{1}{2}\%} = \boxed{\text{interés total}}$$

$$0.06x + 0.045(100{,}000 - x) = 5025$$

Resuelva. A continuación despeje la x.

$$0.06x + 4500 - 0.045x = 5025 \qquad \text{Propiedad Distributiva}$$

$$0.015x + 4500 = 5025 \qquad \text{Combine términos en } x$$

$$0.015x = 525 \qquad \text{Reste 4500}$$

$$x = \frac{525}{0.015} = 35{,}000 \qquad \text{Divida entre 0.015}$$

Entonces María ha invertido \$35,000 al 6% y los restantes \$65,000 al $4\frac{1}{2}\%$.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$$\text{interés total} = 6\% \text{ de } \$35{,}000 + 4\tfrac{1}{2}\% \text{ de } \$65{,}000$$
$$= \$2100 + \$2925 = \$5025 \quad ✔$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21**

Problemas de área o longitud

Cuando usamos álgebra para modelar una situación física, a veces debemos usar fórmulas básicas de geometría. Por ejemplo, es posible que necesitemos una fórmula para un área o un perímetro, o la fórmula que relaciona los lados de triángulos semejantes, o el Teorema de Pitágoras. Casi todas estas fórmulas aparecen al final de este libro. Los dos ejemplos que siguen usan estas fórmulas geométricas para resolver algunos problemas prácticos.

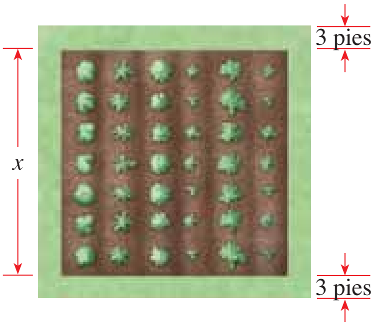


FIGURA 1

EJEMPLO 3 | Dimensiones de un jardín

Un jardín cuadrado tiene un andador de 3 pies de ancho alrededor de su borde exterior, como se ve en la Figura 1. Si el área de todo el jardín, incluyendo los andadores, es de 18,000 pies^2, ¿cuáles son las dimensiones del área plantada?

SOLUCIÓN

Identifique la variable. Nos piden hallar la longitud y ancho del área plantada. Por lo tanto, hacemos

$$x = \text{longitud del área plantada}$$

Convierta las palabras en álgebra. A continuación, convierta la información de la Figura 1 en el lenguaje de álgebra.

En palabras	En álgebra
Longitud del área plantada	x
Longitud de todo el jardín	$x + 6$
Área de todo el jardín	$(x + 6)^2$

Formule el modelo. A continuación proponemos el modelo.

$$\boxed{\text{área de todo el jardín}} = \boxed{18{,}000 \text{ pies}^2}$$

$$(x + 6)^2 = 18{,}000$$

Resuelva. A continuación despejamos x.

$$x + 6 = \sqrt{18{,}000} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

$$x = \sqrt{18{,}000} - 6 \qquad \text{Reste 6}$$

$$x \approx 128$$

El área plantada del jardín es de unos 128 pies por 128 pies.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 47

EJEMPLO 4 | Dimensiones de un lote para construcción

Un lote rectangular para construcción mide 8 pies más largo de lo que es de ancho y tiene un área de 2900 pies^2. Encuentre las dimensiones del lote.

SOLUCIÓN

Identifique la variable. Nos piden hallar el ancho y largo del lote. Entonces, hacemos

$$w = \text{ancho del lote}$$

Convierta las palabras en álgebra. A continuación convertimos la información dada en el problema en el lenguaje de álgebra (vea Figura 2).

En palabras	En álgebra
Ancho del lote	w
Longitud del lote	$w + 8$

Formule el modelo. Ahora formulamos el modelo

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{ancho}\\ \text{del lote}\end{array}} \cdot \boxed{\begin{array}{c}\text{longitud}\\ \text{del lote}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{área}\\ \text{del lote}\end{array}}$$

$$w(w + 8) = 2900$$

Resuelva. A continuación despejamos w.

$$w^2 + 8w = 2900 \qquad \text{Expanda}$$

$$w^2 + 8w - 2900 = 0 \qquad \text{Reste 2900}$$

$$(w - 50)(w + 58) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$w = 50 \quad \text{or} \quad w = -58 \qquad \text{Propiedad de producto cero}$$

Como el ancho del lote debe ser un número positivo, concluimos que $w = 50$ pies. La longitud del lote es $w + 8 = 50 + 8 = 58$ pies.

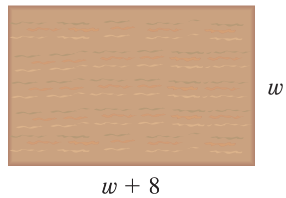


FIGURA 2

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

EJEMPLO 5 | Determinar la altura de un edificio usando triángulos semejantes

Un hombre que mide 6 pies de alto desea hallar la altura de cierto edificio de cuatro pisos. Mide su sombra y encuentra que es de 28 pies de largo, mientras que su propia sombra es de $3\frac{1}{2}$ pies de largo. ¿Cuál es la altura del edificio?

SOLUCIÓN

Identifique la variable. El problema pide la altura del edificio. Por lo tanto, hagamos

$$h = \text{la altura del edificio}$$

Convierta las palabras en álgebra. Usamos el dato que los triángulos de la Figura 3 son semejantes. Recuerde que para cualquier par de triángulos semejantes las relaciones entre lados correspondientes son iguales. Ahora convierta estas observaciones en lenguaje de álgebra.

En palabras	En álgebra
Altura del edificio	h
Razón entre altura y base en el triángulo grande	$\frac{h}{28}$
Razón entre altura y base en el triángulo pequeño	$\frac{6}{3.5}$

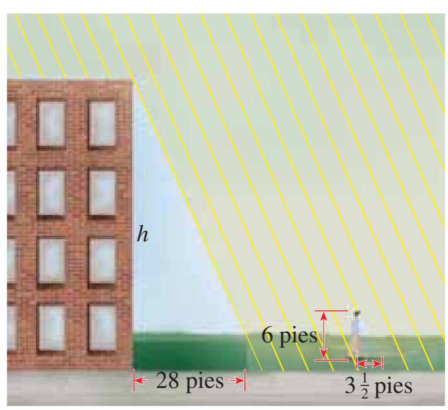


FIGURA 3

Formule el modelo. Como los triángulos grande y pequeño son semejantes, obtenemos la ecuación

$$\boxed{\text{razón entre altura y base en triángulo grande}} = \boxed{\text{razón entre altura y base en triángulo pequeño}}$$

$$\frac{h}{28} = \frac{6}{3.5}$$

Resuelva. A continuación despeje h.

$$h = \frac{6 \cdot 28}{3.5} = 48 \qquad \text{Multiplique por 28}$$

Entonces el edificio mide 48 pies de altura.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 51

▼ Problemas de mezclas

Numerosos problemas reales se refieren a la mezcla de diferentes tipos de sustancias. Por ejemplo, trabajadores de la construcción deben mezclar cemento, grava y arena; el jugo de fruta de un concentrado puede tener mezcla de diferentes tipos de jugos. Los problemas de mezclas y concentraciones hacen uso del hecho de que si una cantidad x de una sustancia se disuelve en una solución con volumen V, entonces la concentración C de la sustancia está dada por

$$C = \frac{x}{V}$$

Por lo tanto, si 10 g de azúcar se disuelven en 5 L de agua, entonces la concentración de azúcar es $C = 10/5 = 2$ g/L. Resolver un problema de mezclas por lo general nos pide analizar la cantidad x de la sustancia que está en la solución. Cuando despejamos x de esta ecuación, vemos que $x = CV$. Observe que en muchos problemas de mezcla la concentración C se expresa como porcentaje, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 | Mezclas y concentración

Un fabricante de bebidas gaseosas anuncia su refresco de naranja como “con sabor natural”, aun cuando contiene sólo 5% de jugo de naranja. Un nuevo reglamento federal estipula que para ser llamada “natural”, una bebida debe contener al menos 10% de jugo de fruta. ¿Cuánto jugo de naranja puro debe agregar este fabricante a 900 galones de refresco de naranja para apegarse al nuevo reglamento?

SOLUCIÓN

Identifique la variable. El problema pide la cantidad de jugo de naranja puro a ser agregado. Por lo tanto, hacemos

$$x = \text{la cantidad (en galones) de jugo de naranja puro a agregar}$$

Convierta las palabras en álgebra. En cualquier problema de este tipo, en el que dos sustancias diferentes han de mezclarse, trazar un diagrama nos ayuda a organizar la información dada (vea Figura 4).

La información de la figura puede convertirse en lenguaje de álgebra, como sigue:

En palabras	En álgebra
Cantidad de jugo de naranja a agregar	x
Cantidad de la mezcla	$900 + x$
Cantidad de jugo de naranja en la primera tina	$0.05(900) = 45$
Cantidad de jugo de naranja en la segunda tina	$1 \cdot x = x$
Cantidad de jugo de naranja en la mezcla	$0.10(900 + x)$

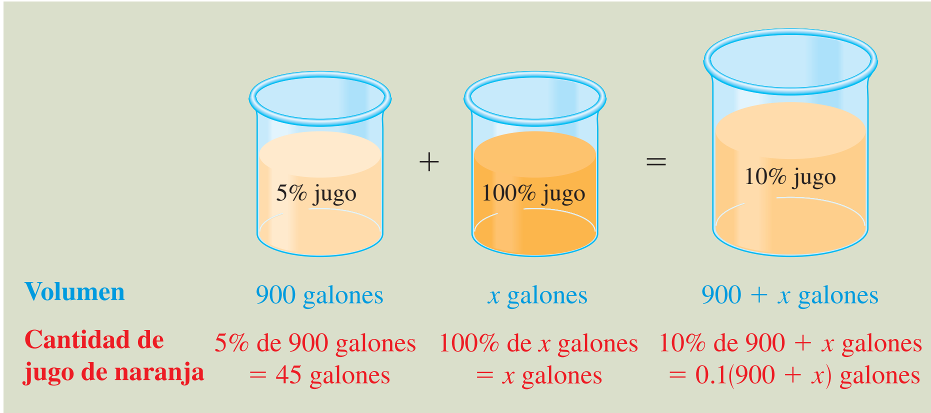


FIGURA 4

Formule el modelo. Para formular el modelo, usamos el dato de que la cantidad total de jugo de naranja en la mezcla es igual al jugo de naranja de las dos primeras tinas.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{cantidad de jugo}\\ \text{de naranja en la}\\ \text{primera tina}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{cantidad de jugo}\\ \text{de naranja en la}\\ \text{segunda tina}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{cantidad de jugo}\\ \text{de naranja en}\\ \text{la mezcla}\end{array}}$$

$$45 + x = 0.1(900 + x) \qquad \text{De la Figura 4}$$

Resuelva. A continuación despeje la x.

$$45 + x = 90 + 0.1x \qquad \text{Propiedad Distributiva}$$

$$0.9x = 45 \qquad \text{Reste } 0.1x \text{ y } 45$$

$$x = \frac{45}{0.9} = 50 \qquad \text{Divida entre } 0.9$$

El fabricante debe agregar 50 galones de jugo de naranja puro al refresco.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

cantidad de jugo antes de mezclar = 5% de 900 galones + 50 galones de jugo puro

= 45 galones + 50 galones = 95 galones

cantidad de jugo después de mezclar = 10% de 950 galones = 95 galones

Las cantidades son iguales. ✔

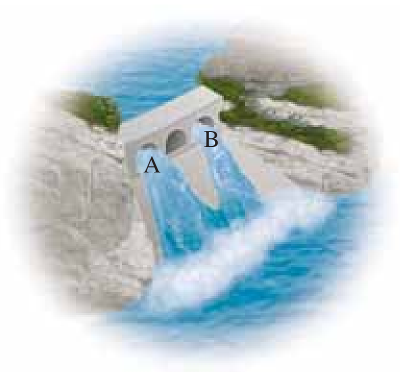
AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **53** ■

▼ Problemas del tiempo necesario para realizar un trabajo

Cuando se resuelva un problema que trate de determinar el tiempo que tardan varios trabajadores en terminar un trabajo, usamos el dato de que si una persona o máquina tarda H unidades de tiempo para terminar el trabajo, entonces en una unidad de tiempo la parte del trabajo que se ha terminado es $1/H$. Por ejemplo, si un trabajador tarda 5 horas para podar un césped, entonces en 1 hora el trabajador podará $1/5$ del césped.

EJEMPLO 7 | Tiempo necesario para realizar un trabajo

Debido a una fuerte tormenta anticipada, el nivel de agua en un estanque debe bajarse 1 pie. Abrir el vertedero A baja el nivel en esta cantidad en 4 horas, mientras que abrir el más pequeño vertedero B hace el trabajo en 6 horas. ¿Cuánto tardará en bajar el nivel de agua 1 pie con ambos vertederos abiertos?



SOLUCIÓN Identifique la variable. Nos piden hallar el tiempo necesario para bajar el nivel 1 pie si ambos vertederos están abiertos. Por lo tanto, hacemos

x = tiempo (en horas) necesario para bajar el nivel de agua 1 pie si ambos vertederos están abiertos

Convierta las palabras en álgebra. No es fácil hallar una ecuación que relacione x a las otras cantidades de este problema. Ciertamente x no es sólo $4 + 6$, porque eso significaría que los dos vertederos juntos necesitarían más tiempo para bajar el nivel del agua que cualquiera de ellos solo. En cambio, vemos la parte del trabajo que puede ejecutar en 1 hora cada uno de los vertederos.

En palabras	En álgebra
Tiempo que tarda en bajar el nivel 1 pie con A y B juntos	x h
Distancia que A baja el nivel en 1 h	$\frac{1}{4}$ pie
Distancia que B baja el nivel en 1 h	$\frac{1}{6}$ pie
Distancia que A y B juntas bajan niveles en 1 h	$\frac{1}{x}$ pie

Formule el modelo. A continuación formulamos el modelo.

$$\text{fracción ejecutada por A} + \text{fracción ejecutada por B} = \text{fracción ejecutada por ambos}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$$

Resuelva. A continuación despejamos x.

$$3x + 2x = 12 \qquad \text{Multiplique por el MCD, } 12x$$

$$5x = 12 \qquad \text{Sume}$$

$$x = \frac{12}{5} \qquad \text{Divida entre 5}$$

Tardará $2\frac{2}{5}$ horas, o 2 h 24 min, para bajar el nivel del agua 1 pie si ambos vertederos están abiertos.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **61**

Problemas de distancia, rapidez y tiempo

El siguiente ejemplo trata sobre distancia, tasa (rapidez) y tiempo. La fórmula a recordar en estos casos es

$$\boxed{\text{distancia} = \text{rapidez} \times \text{tiempo}}$$

donde la rapidez es ya sea la rapidez constante o el promedio de rapidez de un cuerpo en movimiento. Por ejemplo, manejar en auto a 60 mi/h durante 4 horas lleva a una persona a una distancia de $60 \cdot 4 = 240$ millas.

EJEMPLO 8 | Un problema de distancia, rapidez y tiempo

Un jet voló de Nueva York a Los Ángeles, una distancia de 4200 kilómetros. La rapidez para el viaje de regreso fue de 100 km/h más rápido que la rapidez en el vuelo de ida. Si el viaje total duró 13 horas, ¿cuál fue la rapidez del jet de Nueva York a Los Ángeles?

SOLUCIÓN Identifique la variable. Nos piden la rapidez del jet de Nueva York a Los Ángeles. Aquí hacemos

s = rapidez de Nueva York a Los Ángeles

Entonces $s + 100$ = rapidez de Los Ángeles a Nueva York

Convierta las palabras en álgebra. A continuación organizamos la información en una tabla. Primero llenamos la columna "Distancia" porque sabemos que las ciudades están a 4200 km entre sí. A continuación llenamos la columna "Rapidez", porque hemos expresado ambas magnitudes de rapidez en términos de la variable x. Por último, calculamos las entradas para la columna "Tiempo", usando

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}}$$

	Distancia (km)	Rapidez (km/h)	Tiempo (h)
N.Y. a L.A.	4200	s	$\frac{4200}{s}$
L.A. a N.Y.	4200	$s + 100$	$\frac{4200}{s+100}$

Formule el modelo. El viaje total tomó 13 horas, de modo que tenemos el modelo

$$\boxed{\text{tiempo de N.Y. a L.A.}} + \boxed{\text{tiempo de L.A. a N.Y.}} = \boxed{\text{tiempo total}}$$

$$\frac{4200}{s} + \frac{4200}{s + 100} = 13$$

Resuelva. Multiplicando por el común denominador, $s(s + 100)$, tenemos

$$\begin{aligned} 4200(s + 100) + 4200s &= 13s(s + 100) \\ 8400s + 420{,}000 &= 13s^2 + 1300s \\ 0 &= 13s^2 - 7100s - 420{,}000 \end{aligned}$$

Aun cuando esta ecuación se factoriza, con números tan grandes es probable que sea más rápido usar la Fórmula Cuadrática y una calculadora.

$$\begin{aligned} s &= \frac{7100 \pm \sqrt{(-7100)^2 - 4(13)(-420{,}000)}}{2(13)} \\ &= \frac{7100 \pm 8500}{26} \end{aligned}$$

$$s = 600 \qquad \text{o} \qquad s = \frac{-1400}{26} \approx -53.8$$

Como s representa la rapidez, rechazamos la respuesta negativa y concluimos que la rapidez del jet de Nueva York a Los Ángeles fue de 600 km/h.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 67

EJEMPLO 9 | Energía consumida en el vuelo de un pájaro

Los ornitólogos han determinado que algunas especies de aves tienden a evitar vuelos sobre grandes cuerpos de agua durante horas del día, porque generalmente el aire se eleva sobre tierra y baja sobre el agua en el día, de modo que volar sobre el agua requiere de más energía. Un ave se suelta del punto A en una isla, a 5 millas de B, que es el punto más cercano a la playa en línea recta. El ave vuela al punto C en la playa y luego vuela a lo largo de la playa al lugar para anidar D, como se ve en la Figura 5. Suponga que el ave tiene 170 kcal de reservas de energía. Consume 10 kcal/milla volando sobre tierra y 14 kcal/milla volando sobre agua.

(a) ¿En dónde debe estar ubicado el punto C para que el ave use exactamente 170 kcal de energía durante su vuelo?

(b) ¿El ave tiene suficientes reservas de energía para volar directamente de A a D?

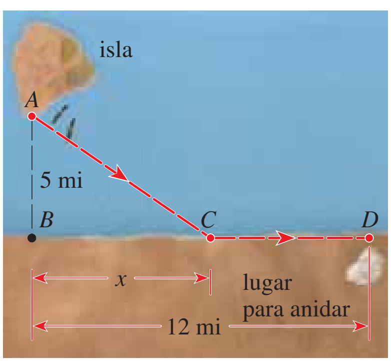


FIGURA 5

BHASKARA (nacido en 1114) fue un matemático, astrónomo y astrólogo de la India. Entre sus muchos logros estaba una ingeniosa demostración del Teorema de Pitágoras. (Vea *Enfoque en la solución de problemas*, en el sitio web **www.stewartmath.com**. compañero de este libro). Su importante libro matemático *Lilavati* (*La Hermosa*) contiene problemas de álgebra planteados en forma de cuentos para su hija Lilavati. Muchos de los problemas empiezan así: "Oh, bella doncella, suponte…" La historieta se relata usando astrología. Bhaskara había determinado que grandes desgracias ocurrirían a su hija si se casaba en cualquier momento que no fuera cierta hora de cierto día. El día de su boda, cuando ella estaba viendo con ansiedad un reloj de agua, una perla de su adorno de la cabeza cayó inadvertidamente y paró el flujo de agua del reloj, haciendo que ella perdiera el momento oportuno para su boda. El libro *Lilavati* de Bhaskara fue escrito para consolarla.

(a) Identifique la variable. Nos piden hallar la ubicación de C. Hacemos

$$x = \text{distancia de } B \text{ a } C$$

Convierta las palabras en álgebra. De la figura, y del dato

$$\text{energía consumida} = \text{energía por milla} \times \text{millas recorridas}$$

determinamos lo siguiente.

En palabras	En álgebra	
Distancia de B a C	x	
Distancia de vuelo sobre agua (de A a C)	$\sqrt{x^2 + 25}$	Teorema de Pitágoras
Distancia de vuelo sobre tierra (de C a D)	$12 - x$	
Energía consumida sobre agua	$14\sqrt{x^2 + 25}$	
Energía consumida sobre tierra	$10(12 - x)$	

Formule el modelo. A continuación formulamos el modelo.

$$\boxed{\text{total de energía consumida}} = \boxed{\text{energía consumida sobre agua}} + \boxed{\text{energía consumida sobre tierra}}$$

$$170 = 14\sqrt{x^2 + 25} + 10(12 - x)$$

Resuelva. Para resolver esta ecuación, eliminamos la raíz cuadrada al llevar primero todos los otros términos a la izquierda del signo igual y luego elevar al cuadrado ambos lados.

$$\begin{aligned}
170 - 10(12 - x) &= 14\sqrt{x^2 + 25} && \text{Aísle a la derecha el término de raíz cuadrada} \\
50 + 10x &= 14\sqrt{x^2 + 25} && \text{Simplifique el lado izquierdo} \\
(50 + 10x)^2 &= (14)^2(x^2 + 25) && \text{Eleve al cuadrado ambos lados} \\
2500 + 1000x + 100x^2 &= 196x^2 + 4900 && \text{Expanda} \\
0 &= 96x^2 - 1000x + 2400 && \text{Todos los términos al lado derecho}
\end{aligned}$$

Esta ecuación podría factorizarse, pero como los números son tan grandes es más fácil usar la Fórmula Cuadrática y una calculadora:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1000 \pm \sqrt{(-1000)^2 - 4(96)(2400)}}{2(96)} \\
&= \frac{1000 \pm 280}{192} = 6\tfrac{2}{3} \quad \text{o} \quad 3\tfrac{3}{4}
\end{aligned}$$

El punto C debe ser ya sea $6\frac{2}{3}$ o $3\frac{3}{4}$ millas desde B para que el ave consuma exactamente 170 kcal de energía durante su vuelo.

(b) Por el Teorema de Pitágoras (vea página 219), la longitud de la ruta directamente de A a D es $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, de modo que la energía que el ave requiera para esa ruta es $14 \times 13 = 182$ kcal. Esto es más energía de la que dispone el ave, de modo que no puede seguir esa ruta.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **83**

1.6 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Explique verbalmente qué significa que una ecuación modele una situación real y dé un ejemplo.

2. En la fórmula $I = Prt$ para interés simple, P representa_____, r es______ y t es________.

3. Dé una fórmula para el área de la figura geométrica.

(a) Un cuadrado de lado x: $A =$ _______.

(b) Un rectángulo de longitud l y ancho w: $A =$ _______.

(c) Un círculo de radio r: $A =$ ______.

4. El vinagre balsámico contiene 5% de ácido acético, de modo que una botella de 32 onzas de vinagre balsámico contiene _____onzas de ácido acético.

5. Un pintor pinta una pared en x horas, por lo que la fracción de la pared que pinta en 1 hora es ______.

6. La fórmula $d = rt$ modela la distancia d recorrida por un objeto que se mueve a una rapidez r constante en el tiempo t. Encuentre fórmulas para las siguientes cantidades.

$r =$ _______ $\qquad t =$ _______

HABILIDADES

7-18 ■ Exprese la cantidad dada en términos de la variable indicada.

7. La suma de tres enteros consecutivos; $n =$ primer entero de los tres

8. La suma de tres enteros consecutivos; $n =$ entero intermedio de los tres

9. El promedio de tres calificaciones de examen si las dos primeras calificaciones son 78 y 82; $s =$ tercera calificación de examen

10. El promedio de cuatro calificaciones de preguntas de cada una de las tres primeras calificaciones es 8; $q =$ cuarta calificación de preguntas

11. El interés obtenido después de un año sobre una inversión es $2\frac{1}{2}\%$ de interés simple por año; $x =$ número de dólares invertidos

12. La renta total pagada por un apartamento si la renta es \$795 al mes; $n =$ número de meses

13. El área (en pies^2) de un rectángulo que mide tres veces más de largo que de ancho; $w =$ ancho del rectángulo (en pies)

14. El perímetro (en cm) de un rectángulo que es 5 cm más largo que su ancho; $w =$ ancho del rectángulo (en cm)

15. La distancia (en millas) que un auto recorre en 45 minutos; $s =$ rapidez del auto (en mi/h)

16. El tiempo (en horas) que tarda en recorrer una distancia determinada a 55 mi/h; $d =$ distancia dada (en millas)

17. La concentración (en oz/gal) de sal en una mezcla de 3 galones de salmuera que contiene 25 onzas de sal a la que se ha agregado agua pura; $x =$ volumen de agua pura agregada (en galones)

18. El valor (en centavos) del cambio en un monedero que contiene el doble de monedas de 5 centavos que de centavo, cuatro monedas de 10 centavos más que de 5 centavos, y tantas monedas de 25 centavos que de monedas de 5 combinadas; $p =$ número de monedas de un centavo.

APLICACIONES

19. Renta de un camión Una compañía que renta vehículos cobra \$65 al día y 20 centavos por milla por rentar un camión. Miguel rentó un camión durante 3 días y su cuenta fue de \$275. ¿Cuántas millas recorrió?

20. Costos de teléfono celular Una compañía de telefonía celular cobra una cuota mensual de \$10 por los primeros 1000 mensajes de texto y 10 centavos por cada mensaje adicional de texto. La cuenta de Miriam por mensajes de texto para el mes de junio es de \$38.50. ¿Cuántos mensajes de texto envió ella ese mes?

21. Inversiones Felicia invirtió \$12,000, una parte de los cuales gana una tasa de interés simple de $4\frac{1}{2}\%$ al año y el resto gana una tasa de 4% al año. Después de 1 año, el interés total ganado sobre estas inversiones fue de \$525. ¿Cuánto dinero invirtió ella a cada una de las tasas?

22. Inversiones Si Benjamín invierte \$4000 al 4% de interés al año, ¿cuánto dinero adicional debe invertir al $5\frac{1}{2}\%$ de interés anual, para asegurar que el interés que reciba cada año sea $4\frac{1}{2}\%$ de la cantidad total invertida?

23. Inversiones ¿Qué tasa anual de interés debe ganar una persona para ganar sobre una inversión de \$3500, para asegurar recibir \$262.50 de interés después de 1 año?

24. Inversiones Jaime invierte \$1000 a cierta tasa de interés anual, e invierte otros \$2000 a una tasa anual que es medio por ciento más alta. Si él recibe un total de \$190 de interés en 1 año, ¿a qué tasa se invierten los \$1000?

25. Salarios Una ejecutiva de una compañía de ingeniería gana un salario mensual más un bono de Navidad de \$8500. Si ella gana un total de \$97,300, ¿cuál es su salario mensual?

26. Salarios Una mujer gana 15% más que su esposo. Juntos ganan \$69,875 al año. ¿Cuál es el salario anual del esposo?

27. Herencia Camilo está ahorrando para comprarse una casa para vacacionar. Él hereda algún dinero de un tío rico, luego combina esto con los \$22,000 que ya había ahorrado y duplica el total en una inversión afortunada. Termina con \$134,000, que es justo lo suficiente para comprarse una cabaña junto a un lago. ¿Cuánto heredó?

28. Paga de tiempo extra Elena gana \$7.50 por hora en su trabajo, pero si trabaja más de 35 horas a la semana le pagan $1\frac{1}{2}$ veces su salario regular por las horas de tiempo extra trabajadas. En una semana ella gana un salario bruto de \$352.50. ¿Cuántas horas de tiempo extra trabajó esa semana?

29. **Costos de mano de obra** Un plomero y su ayudante trabajan juntos para cambiar las tuberías de una casa vieja. El plomero cobra \$45 por hora por su propio trabajo y \$25 por hora por el trabajo del ayudante. El plomero trabaja el doble de tiempo que su ayudante en el trabajo, y el cobro por mano de obra en la factura final es de \$4025. ¿Cuánto tiempo trabajaron el plomero y su ayudante en este trabajo?

30. Un acertijo Un padre tiene cuatro veces la edad de su hija; en 6 años, tendrá tres veces la edad que actualmente tiene su hija. ¿Cuál es la edad actual de la hija?

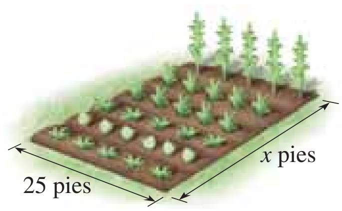
31. Un acertijo Un actor de cine, que no está dispuesto a decir su edad, planteó el siguiente acertijo a un columnista de chismes. "Hace siete años, yo tenía 11 veces la edad de mi hija; ahora tengo cuatro veces su edad." ¿Cuál es la edad del actor?

32. Cuadrangulares en su carrera Durante su carrera en las Ligas Mayores, Hank Aaron conectó 41 cuadrangulares más de los que conectó Babe Ruth en su carrera. Juntos conectaron 1469 cuadrangulares. ¿Cuántos conectó Babe Ruth?

33. Valor de monedas Un monedero contiene igual número de monedas de un centavo, de cinco centavos y de diez centavos. El valor total de las monedas es \$1.44. ¿Cuántas monedas de cada tipo contiene el monedero?

34. Valor de monedas Mary tiene \$3.00 en monedas de 5, de 10 y de 25 centavos. Si ella tiene el doble de monedas de 10 que de 25 y cinco más de monedas de 5 que de 10 centavos, ¿cuántas monedas de cada tipo tiene ella?

35. Longitud de un jardín Un jardín rectangular mide 25 pies de ancho. Si su área es de 1125 pies^2, ¿cuál es la longitud del jardín?



36. Ancho de un pastizal Un pastizal mide el doble de largo que su ancho. Su área es de 115,200 pies^2. ¿Cuál es el ancho del pastizal?

37. Dimensiones de un lote Un lote de terreno cuadrado tiene una construcción de 60 pies de largo y 40 pies de ancho en una esquina. El resto del terreno fuera del edificio forma un estacionamiento. Si éste tiene un área de 12,000 pies^2, ¿cuáles son las dimensiones de todo el lote de terreno?

38. Dimensiones de un lote Un lote para construcción, de medio acre, mide 5 veces más de largo que de ancho. ¿Cuáles son sus dimensiones? [*Nota:* 1 acre = 43,560 pies^2.]

39. Dimensiones de un jardín Un jardín rectangular mide 10 pies más de largo que de ancho. Su área es 875 pies^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

40. Dimensiones de un cuarto Una habitación rectangular mide 7 pies más de largo que su ancho. Su área es de 228 pies^2. ¿Cuál es el ancho del cuarto?

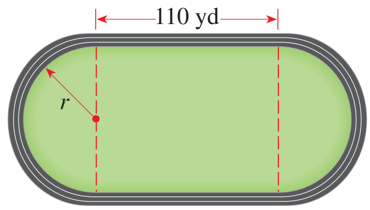
41. Dimensiones de un jardín Un agricultor tiene un lote rectangular de jardín rodeado por una cerca de 200 pies. Encuentre la longitud y ancho si su área es de 2400 pies^2.

perímetro = 200 pies

42. Dimensiones de un lote Una parcela de terreno mide 6 pies más de largo que de ancho. Cada diagonal desde una esquina a la esquina opuesta es de 174 pies de largo. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?

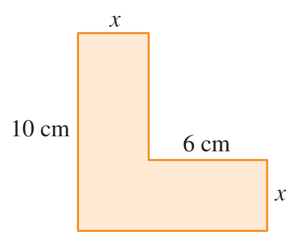
43. Dimensiones de un lote Una parcela rectangular de terreno mide 50 pies de ancho. La longitud de una diagonal entre esquinas opuestas es de 10 pies más que la longitud de la parcela. ¿Cuál es la longitud de la parcela?

44. Dimensiones de una pista Una pista de carreras tiene la forma mostrada en la figura, con costados rectos y extremos semicirculares. Si la longitud de la pista es de 440 yardas y las dos partes rectas miden 110 yardas de largo cada una, ¿cuál es el radio de las partes semicirculares (a la yarda más cercana)?



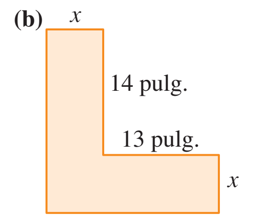
45. Longitud y área Encuentre la longitud x de la figura. Se da el área de la región sombreada.

(a)



área = 144 cm^2

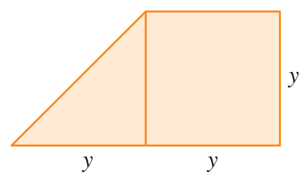
(b)



área = 160 pulg.^{2}

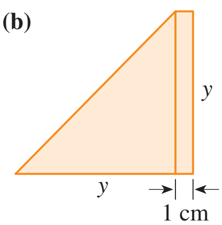
46. Longitud y área Encuentre la longitud y de la figura. Se da el área de la región sombreada.

(a)



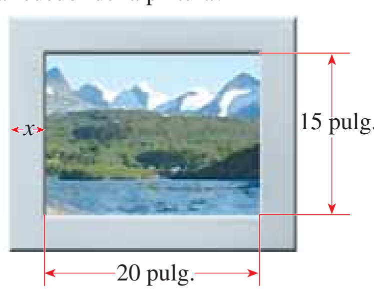
área = 120 pulg^2

(b)

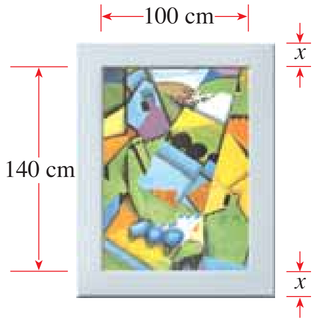


área = 1200 cm^2

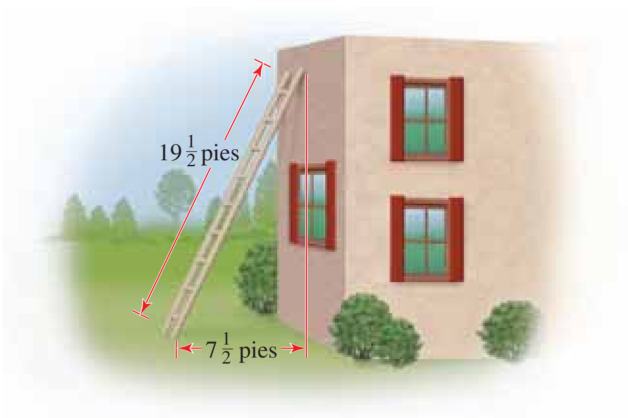
47. Enmarcar una pintura Ali pinta con acuarela en una hoja de papel de 20 pulgadas de ancho por 15 pulgadas de alto. A continuación pone esta hoja en un marco de cartón de modo que una franja de ancho uniforme del marco de cartón se ve a todo alrededor de la pintura. El perímetro del marco de cartón es de 102 pulgadas. ¿Cuál es el ancho de la franja del marco de cartón que se ve alrededor de la pintura?



48. Dimensiones de un cartel Un cartel tiene una superficie rectangular impresa de 100 cm por 140 cm y una franja negra de ancho uniforme alrededor de los bordes. El perímetro del cartel es $1\frac{1}{2}$ veces el perímetro de la superficie impresa. ¿Cuál es el ancho de la franja negra?

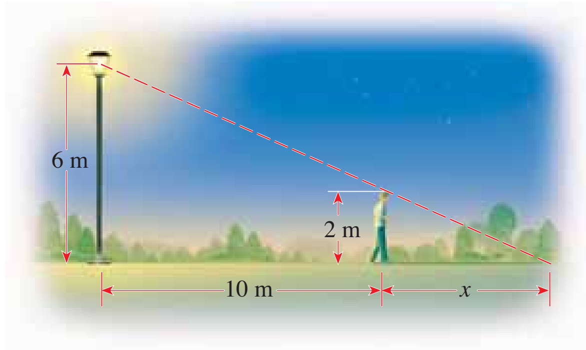


49. Alcance de una escalera Una escalera de $19\frac{1}{2}$ pies se apoya contra un edificio. La base de la escalera está a $7\frac{1}{2}$ pies del edificio. ¿A qué altura del edificio llega la escalera?

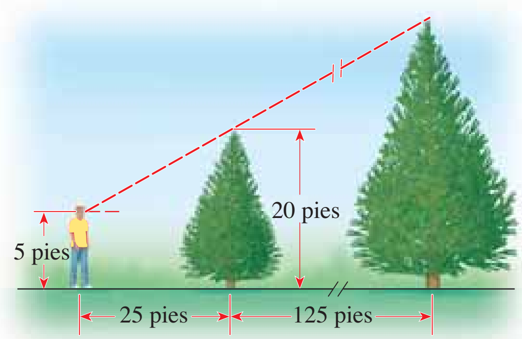


50. Altura de un asta de bandera Un asta de bandera está asegurada en lados opuestos por medio de dos alambres (llamados "vientos"), cada uno de los cuales mide 5 pies más que el asta. La distancia entre los puntos donde los alambres se fijan al suelo es igual a la longitud de un alambre "viento". ¿Cuál es la altura del asta de bandera (a la pulgada más cercana)?

51. Longitud de una sombra Un hombre está alejándose de un poste de alumbrado que tiene una fuente de luz a 6 m sobre el suelo. El hombre mide 2 m de alto. ¿Cuál es la longitud de la sombra del hombre cuando éste está a 10 m del poste? [*Sugerencia:* Use triángulos semejantes.]



52. Altura de un árbol Un maderero determina la altura de un árbol alto al medir uno más pequeño que está a 125 pies de distancia del primero, y luego moviéndose de manera que sus ojos estén en la línea de vista a lo largo de las cumbres de los árboles y midiendo la distancia a la que él está del árbol pequeño (vea la figura). Suponga que el árbol pequeño mide 20 pies de alto, el hombre está a 25 pies del árbol pequeño y el nivel de sus ojos está a 5 pies sobre el suelo. ¿Cuál es la altura del árbol más alto?



53. Problema de mezclas ¿Qué cantidad de una solución ácida al 60% debe mezclarse con una solución al 30% para producir 300 mL de una solución al 50%?

54. Problema de mezclas ¿Qué cantidad de ácido puro debe agregarse a 300 mL de una solución al 50% para producir una solución ácida al 60%?

55. Problema de mezclas Una joyera tiene cinco anillos, cada uno de los cuales pesa 18 g, hechos de una aleación de 10% de plata y 90% de oro. Ella decide fundir los anillos y agregar suficiente plata para reducir el contenido de oro a 75%. ¿Cuánta plata debe agregar?

56. Problema de mezclas Una olla tiene 6 L de salmuera a una concentración de 120 g/L. ¿Cuánta agua debe hervirse para aumentar la concentración a 200 g/L?

57. Problema de mezclas El radiador de un auto está lleno de una solución al 60% de anticongelante y 40% de agua. El fabricante del anticongelante sugiere que para operar el auto en verano, el enfriamiento óptimo del auto se obtiene con sólo 50% de anticongelante. Si la capacidad del radiador es 3.6 L, ¿cuánto líquido de enfriamiento debe drenarse y sustituirse con agua para reducir la concentración de anticongelante al nivel recomendado?

58. Problema de mezclas Una clínica utiliza una solución de blanqueador para esterilizar cajas de Petri en las que crecen cultivos. El tanque de esterilización contiene 100 galones de solución de blanqueador doméstico común al 2%, mezclado con agua destilada pura. Nuevas investigaciones indican que la concentración de blanqueador debe ser al 5% para completar la esterilización. ¿Cuánto de la solución debe drenarse y sustituirse con blanqueador para aumentar el contenido de blanqueador al nivel recomendado?

59. Problema de mezclas Una botella contiene 750 mL de jugos de frutas con una concentración de 50% de jugo de frutas puro. Jill toma 100 mL del ponche y luego vuelve a llenar la botella con una cantidad igual de una marca más barata del ponche. Si la concentración del jugo en la botella se reduce ahora al 48%, ¿cuál era la concentración del ponche que agregó Jill?

60. Problema de mezclas Un comerciante mezcla té que vende en \$3.00 por libra con té que vende en \$2.75 por libra para producir 80 lb de una mezcla que vende en \$2.90 por libra. ¿Cuántas libras de cada tipo de té debe usar el comerciante en la mezcla?

61. Compartir un trabajo Candy y Tim comparten una ruta para vender periódicos. Candy tarda 70 minutos en entregar todos los periódicos; Tim tarda 80 minutos. ¿Cuánto tiempo les lleva a los dos cuando trabajan juntos?

62. Compartir un trabajo Stan e Hilda pueden podar el césped en 40 minutos si trabajan juntos. Si Hilda trabaja el doble de rápido que Stan, ¿cuánto tiempo le lleva a Stan podar el césped él solo?

63. Compartir un trabajo Betty y Karen han sido contratados para pintar las casas en un nuevo fraccionamiento habitacional. Trabajando juntas, las mujeres pueden pintar una casa en dos tercios del tiempo que tarda Karen si trabaja sola. Betty tarda 6 horas en pintar una casa ella sola. ¿Cuánto tarda Karen en pintar una casa si trabaja sola?

64. Compartir un trabajo Los vecinos Bob y Jim, que viven en casas contiguas entre sí, usan mangueras de ambas casas para llenar la piscina de Bob. Saben que tardan 18 horas usando ambas mangueras. También saben que la manguera de Bob, si se usa sola, toma 20% menos tiempo que la manguera de Jim sola. ¿Cuánto tiempo se requiere para llenar la piscina con cada una de las mangueras sola?

65. Compartir un trabajo Irene y Henry, trabajando juntos, pueden lavar todas las ventanas de su casa en 1 h 48 minutos. Trabajando solo, Henry tarda 11 h más que Irene para hacer el trabajo. ¿Cuánto tarda cada persona trabajando sola para lavar todas las ventanas?

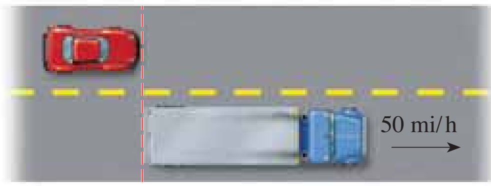
66. Compartir un trabajo Jack, Kay y Lynn reparten volantes de publicidad en una pequeña población. Si cada persona trabaja sola, Jack tarda 4 h en repartir todos los volantes, y Lynn tarda 1 h más de lo que tarda Kay. Trabajando juntos, pueden repartir todos los volantes en 40% del tiempo que tarda Kay trabajando sola. ¿Cuánto le toma a Kay repartir todos los volantes ella sola?

67. Distancia, rapidez y tiempo Wendy hizo un viaje de Davenport a Omaha, una distancia de 300 millas. En parte, viajó en autobús que llegó a la estación de ferrocarril justo a tiempo para que completara su viaje en tren. El autobús promedió 40 mi/h y el tren promedió 60 mi/h. Todo el viaje tomó 51 h. ¿Cuánto tardó Wendy en el tren?

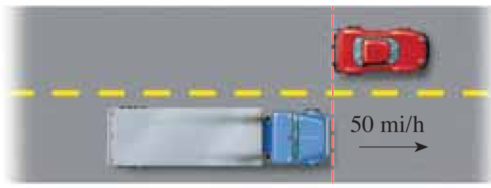
68. Distancia, rapidez y tiempo Dos ciclistas están a 90 millas entre sí. Arrancan en sus bicicletas al mismo tiempo uno hacia el otro. Uno de ellos pedalea el doble de rápido que el otro. Si se encuentran 2 h más tarde, ¿a qué velocidad promedio está viajando cada uno de ellos?

69. Distancia, rapidez y tiempo Un piloto voló en jet de Montreal a Los Ángeles, una distancia de 2500 millas. En el viaje de regreso, el promedio de velocidad fue 20% más rápido que el de ida. El viaje redondo tardó 9 h 10 minutos. ¿Cuál fue la velocidad de Montreal a Los Ángeles?

70. Distancia, rapidez y tiempo Una mujer que maneja un auto de 14 pies de largo está rebasando a un camión de 30 pies de largo. El camión está corriendo a 50 mi/h. ¿Con qué rapidez debe ir el auto de la mujer para que pueda pasar por completo al camión en 6 s, desde la posición mostrada en la figura (a) hasta la posición de la figura (b)? [*Sugerencia:* Use pies y segundos en lugar de millas y horas.]



(a)



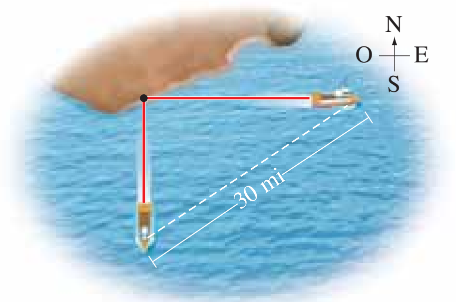
(b)

71. Distancia, rapidez y tiempo Un vendedor viaja en auto de Ajax a Barrington, una distancia de 120 millas a una velocidad constante. A continuación aumenta su velocidad en 10 mi/h para recorrer las 150 millas de Barrington a Collins. Si el segundo tramo de su viaje tomó 6 minutos más que el primer tramo, ¿con qué rapidez manejaba entre Ajax y Barrington?

72. Distancia, rapidez y tiempo Kiran viajó de Tortula a Cactus una distancia de 250 millas. Ella aumentó su velocidad en 10 mi/h para el viaje de 360 millas de Cactus a Dry Junction. Si el viaje total tomó 11 h, ¿cuál fue su velocidad de Tortula a Cactus?

73. Distancia, rapidez y tiempo A una tripulación les tomó 2 h 40 min remar 6 km corriente arriba y regresar. Si la rapidez de la corriente era de 3 km/h, ¿cuál era la velocidad de remar de la tripulación en aguas tranquilas?

74. Velocidad de un bote Dos botes pesqueros salen de un puerto al mismo tiempo, uno de ellos dirigiéndose al este y el otro al sur. El bote con dirección al este viaja a 3 mi/h más rápido que el que va al sur. Después de dos horas, los botes están a 30 millas entre sí. Encuentre la rapidez del bote que se dirige al sur.

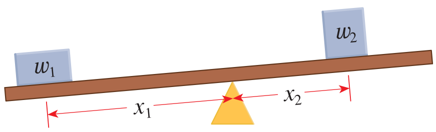


75. Ley de la palanca La figura muestra un sistema de palancas, semejante a un subibaja (balancín) que se puede hallar en un parque de recreo infantil. Para que el sistema esté en equilibrio, el producto del peso y su distancia desde el fulcro debe ser igual en cada lado; esto es,

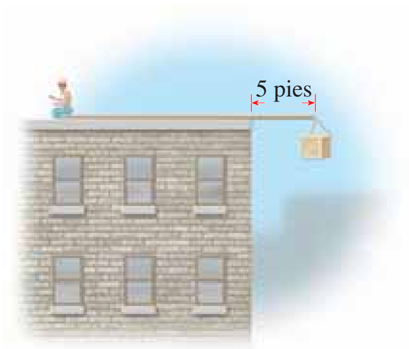
$$w_1x_1 = w_2x_2$$

Esta ecuación recibe el nombre de **ley de la palanca** y fue descubierta por Arquímedes (vea página 729).

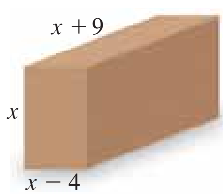
Una mujer y su hijo están jugando en un subibaja. El muchacho está en un extremo, a 8 pies del fulcro. Si el hijo pesa 100 lb y la madre pesa 125 lb, ¿dónde debe sentarse la mujer para que el subibaja esté balanceado?



76. Ley de la palanca Una tabla de 30 pies de largo está apoyada en lo alto de un edificio de techo plano, con 5 pies de la tabla sobresaliendo del borde, como se ve en la figura. Un trabajador que pesa 240 lb se sienta en un extremo de la tabla. ¿Cuál es el peso máximo que puede ser colgado del extremo de la tabla que sobresale si debe estar en equilibrio? (Use la ley de la palanca expresada en el Ejercicio 75.)

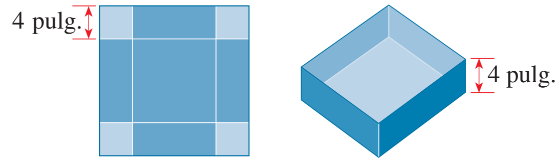


77. Dimensiones de una caja Una caja grande de madera terciada tiene un volumen de 180 pies^3. Su longitud es 9 pies más que su peso, y su ancho es 4 pies menor que su altura. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja?

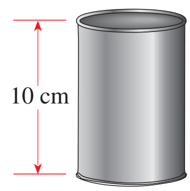


78. Radio de una esfera Un joyero tiene tres pequeñas esferas de oro macizo, de 2 mm de radio, 3 mm y 4 mm. Él decide fundirlas y hacer con ellas una sola esfera. ¿Cuál será el radio de esta esfera más grande?

79. Dimensiones de una caja Una caja con una base cuadrada y sin tapa ha de hacerse de una pieza cuadrada de cartón al cortarle cuadros de 4 pulgadas de cada esquina y doblar los lados, como se muestra en la figura. La caja ha de contener 100 pulg.^{3}. ¿De qué dimensión se necesita la pieza de cartón?



80. Dimensiones de una lata Una lata cilíndrica tiene un volumen de 40π cm^3 y mide 10 cm de alto. ¿Cuál es su diámetro? [*Sugerencia:* Use la fórmula de volumen que aparece al final del libro.]

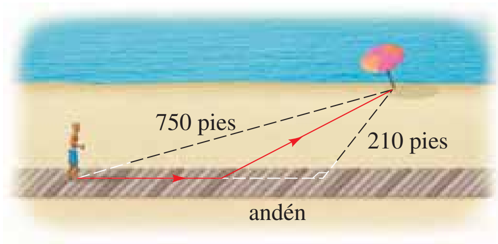


81. Radio de un tanque Un tanque esférico tiene una capacidad de 750 galones. Usando el dato de que un galón es 0.1337 pies^3 aproximadamente, encuentre el radio del tanque (al centésimo de pie más cercano).

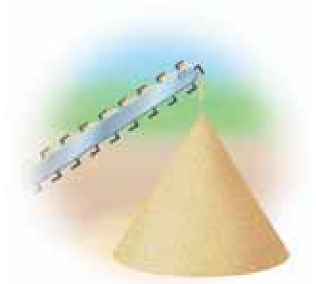
82. Dimensiones de un lote Un lote urbano tiene la forma de un triángulo recto cuya hipotenusa es 7 pies más larga que uno de los otros lados. El perímetro del lote es de 392 pies. ¿Cuál es la longitud de cada lado del lote?

83. Costos de construcción La ciudad de Foxton está a 10 millas al norte de un camino abandonado de dirección este-oeste que pasa por Grimley, como se ve en la figura. El punto del camino abandonado más cercano a Foxton está a 40 millas de Grimley. Oficiales del condado están por construir un nuevo camino que enlaza las dos ciudades. Han determinado que restaurar el camino antiguo costaría \$100,000 por milla, mientras que construir un nuevo camino costaría \$200,000 por milla. ¿Cuánto del camino abandonado debe usarse (como se indica en la figura) si los oficiales tienen intención de gastar exactamente \$6.8 millones de dólares? ¿Costaría menos que esto la construcción de un nuevo camino que conecte las ciudades directamente?

84. Distancia, rapidez y tiempo Un entablado o andén de madera está paralelo y a 210 pies tierra adentro del borde de una playa recta. Una playa arenosa está entre el andén y el borde de la playa. Un hombre está de pie en el andén, exactamente a 750 pies de su sombrilla para playa al otro lado de la arena, que está recta en el borde de la playa. El hombre camina a 4 pies/s en el andén y a 2 pies/s en la arena. ¿Qué distancia debe caminar en el andén antes de entrar a la arena si desea llegar a su sombrilla en exactamente 4 minutos 45 segundos?

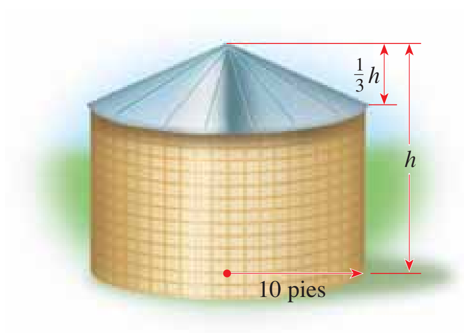


85. Volumen de grano Están cayendo granos de un canal al suelo, formando una pila cónica cuyo diámetro es siempre el triple de su altura. ¿De qué altura es la pila (al centésimo de pie más cercano) cuando contiene 1000 pies^3 de grano?

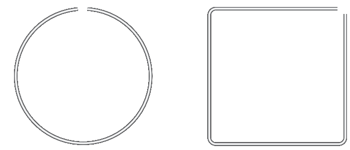


86. Monitores de TV Dos monitores de TV, colocados uno al lado del otro en un estante de una tienda de aparatos eléctricos, tienen la misma altura de pantalla. Uno de ellos tiene una pantalla convencional, que es 5 pulgadas más ancha que su altura; el otro tiene una pantalla más ancha, de alta definición, que es 1.8 veces más ancha que su altura. La medida diagonal de la pantalla más ancha es 14 pulgadas más que la medida diagonal de la pantalla más pequeña. ¿Cuál es la altura de las pantallas, correcta al 0.1 de pulgada más cercano?

87. Dimensiones de una estructura Un silo de almacenamiento para maíz está formado de una sección cilíndrica hecha de malla de alambre, rematada por un techo cónico de estaño, como se ve en la figura. La altura del techo es un tercio de la altura de toda la estructura. Si el volumen total de la estructura es 1400π pies^3 y su radio es 10 pies, ¿cuál es su altura? [*Sugerencia*: Use las fórmulas de volumen al final del libro.]



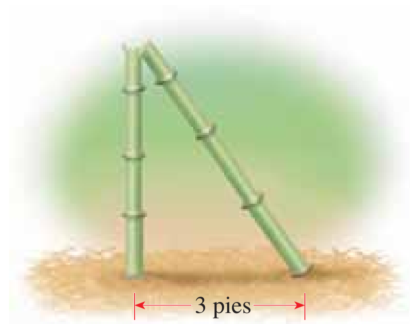
88. Comparación de áreas Un alambre de 360 pulgadas de largo se corta en dos piezas. A una de éstas se le da forma de cuadrado y de círculo a la otra. Si las dos figuras tienen la misma área, ¿cuáles son las longitudes de las dos piezas de alambre (al décimo de pulgada más cercano)?



89. Un antiguo problema chino Este problema ha sido tomado de un libro de texto chino llamado *Chui-chang suan-shu*, o *Nueve Capítulos del Arte Matemático*, que fue escrito hacia el año 250 a.C.

> Un tallo de bambú de 10 pies de largo se descompone en forma tal que su punta toca el suelo a 3 pies de la base del tallo, como se ve en la figura. ¿Cuál es la altura de la rotura?

[*Sugerencia*: Use el Teorema de Pitágoras.]



DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

90. Investigación histórica Lea las notas biográficas acerca de Pitágoras (página 219), Euclides (página 497) y Arquímedes (página 729). Escoja uno de estos matemáticos e investigue más sobre él en la biblioteca o en Internet. Escriba un breve ensayo de lo que haya encontrado. Incluya información biográfica y una descripción de la matemática por la cual él es famoso.

91. Una ecuación cuadrática de Babilonia Los antiguos babilonios sabían cómo resolver ecuaciones cuadráticas. A continuación veamos un problema de una tablilla cuneiforme hallada en una escuela de Babilonia, que data del año 2000 a.C.

> Tengo un junco, sé su longitud. De él tomo un cúbito que cabe 60 veces a lo largo de mi campo. Lo devuelvo al junco que he dividido, y cabe 30 veces a lo ancho de mi campo. El área de mi campo es de 375 nindas (una medida) cuadradas. ¿Cuál era la longitud original del junco?

Resuelva este problema. Use el dato que 1 ninda = 12 cúbitos.

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO **Ecuaciones a lo largo del tiempo**

En este proyecto estudiamos ecuaciones que fueron creadas y resueltas por los pueblos antiguos de Egipto, Babilonia, India y China. El lector puede hallar el proyecto en el sitio web compañero de este libro: **www.stewartmath.com**

1.7 DESIGUALDADES

Resolución de desigualdades lineales ▶ Resolución de desigualdades no lineales ▶ Desigualdades con valor absoluto ▶ Modelado con desigualdades

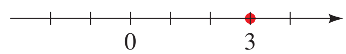
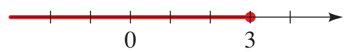
Algunos problemas en álgebra llevan a **desigualdades** en lugar de ecuaciones. Una desigualdad se ve muy semejante a una ecuación, excepto que en lugar del signo igual hay uno de los símbolos $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$. A continuación veamos un ejemplo de una desigualdad:

$$4x = 7 \leq 19$$

x	$4x + 7 \leq 19$
1	$11 \leq 19$ ✔
2	$15 \leq 19$ ✔
3	$19 \leq 19$ ✔
4	$23 \leq 19$ ✗
5	$27 \leq 19$ ✗

La tabla que aparece al margen muestra que algunos números satisfacen la desigualdad y algunos números no la satisfacen.

Resolver una desigualdad que contenga una variable significa hallar todos los valores de la variable que hagan verdadera la desigualdad. A diferencia de una ecuación, una desigualdad por lo general tiene un infinito de soluciones, que forma un intervalo o una unión de intervalos en la recta real. La siguiente ilustración muestra el modo en que una desigualdad difiere de su ecuación correspondiente:

		Solución	**Gráfica**
Ecuación:	$4x + 7 = 19$	$x = 3$	
Desigualdad	$4x + 7 \leq 19$	$x \leq 3$	

Para resolver desigualdades, usamos las reglas siguientes para aislar la variable en un lado del signo de desigualdad. Estas reglas nos dicen cuándo dos desigualdades son *equivalentes* (el símbolo $\Leftrightarrow$ significa "es equivalente a"). En estas reglas los símbolos A, B y C representan números reales o expresiones algebraicas. A continuación expresamos las reglas para desigualdades que contienen el símbolo $\leq$, pero aplican a los cuatro símbolos de desigualdad.

REGLAS PARA DESIGUALDADES

Regla	Descripción
1. $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad A + C \leq B + C$	**Sumar** la misma cantidad a cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
2. $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad A - C \leq B - C$	**Restar** la misma cantidad de cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
3. Si $C > 0$, entonces $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad CA \leq CB$	**Multiplicar** cada lado de una desigualdad por la misma cantidad *positiva* da una desigualdad equivalente.
4. Si $C < 0$, entonces $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad CA \geq CB$	**Multiplicar** cada lado de una desigualdad por la misma *cantidad negativa invierte la dirección* de la desigualdad.
5. Si $A > 0$ y $B > 0$, entonces $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{A} \geq \dfrac{1}{B}$	**Tomar** recíprocos de cada lado de una desigualdad que contenga cantidades *positivas invierte la dirección* de la desigualdad.
6. Si $A \leq B$ y $C \leq D$, entonces $A + C \leq B + D$	Las desigualdades se pueden sumar.

Ponga especial atención a las Reglas 3 y 4. La Regla 3 dice que podemos multiplicar (o dividir) cada lado de una desigualdad por un número *positivo*, pero la Regla 4 dice que si multiplicamos cada lado de una desigualdad por un número *negativo*, entonces invertimos la dirección de la desigualdad. Por ejemplo, si empezamos con la desigualdad

$$3 < 5$$

y multiplicamos por 2, obtenemos

$$6 < 10$$

pero si multiplicamos por -2, obtenemos

$$-6 > -10$$

▼ Solución de desigualdades lineales

Una desigualdad es **lineal** si cada término es constante o un múltiplo de la variable. Para resolver una desigualdad lineal, aislamos la variable en un lado del signo de desigualdad.

EJEMPLO 1 | Resolver una desigualdad lineal

Resuelva la desigualdad $3x < 9x + 4$ y trace el conjunto solución.

SOLUCIÓN

$3x < 9x + 4$	Desigualdad dada
$3x - 9x < 9x + 4 - 9x$	Reste $9x$
$-6x < 4$	Simplifique
$\left(-\frac{1}{6}\right)(-6x) > \left(-\frac{1}{6}\right)(4)$	Multiplique por $-\frac{1}{6}$ e invierta la desigualdad
$x > -\frac{2}{3}$	Simplifique

Multiplicar por el número negativo $-\frac{1}{6}$ *invierte* la dirección de la desigualdad.

El conjunto solución está formado por todos los números mayores a $-\frac{2}{3}$. En otras palabras, la solución de la desigualdad es el intervalo $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$. Está graficada en la Figura 1.

FIGURA 1

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21** ■

EJEMPLO 2 | Resolver un par de desigualdades simultáneas

Resuelva las desigualdades $4 \le 3x - 2 < 13$.

SOLUCIÓN El conjunto solución está formado por todos los valores de x que satisfacen las desigualdades $4 \le 3x - 2$ y $3x - 2 < 13$. Usando las Reglas 1 y 3, vemos que las siguientes desigualdades son equivalentes:

$4 \le 3x - 2 < 13$	Desigualdad dada
$6 \le 3x < 15$	Sume 2
$2 \le x < 5$	Divida entre 3

Por lo tanto, el conjunto de solución es $[2, 5)$, como se ve en la Figura 2.

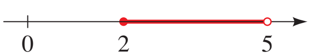


FIGURA 2

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31** ■

▼ Solución de desigualdades no lineales

Para resolver desigualdades que contengan cuadrados y otras potencias de la variable, usamos factorización, junto con el principio siguiente.

> **EL SIGNO DE UN PRODUCTO O COCIENTE**
>
> Si un producto o un cociente tienen un número *par* de factores *negativos*, entonces su valor es *positivo*.
>
> Si un producto o un cociente tienen un número *impar* de factores *negativos*, entonces su valor es *negativo*.

Por ejemplo, para resolver la desigualdad $x^2 - 5x \leq -6$, primero movemos todos los términos al lado izquierdo y factorizamos para obtener

$$(x - 2)(x - 3) \leq 0$$

Esta forma de la desigualdad nos dice que el producto $(x - 2)(x - 3)$ debe ser negativo o cero, de modo que, para resolver la desigualdad, debemos determinar en dónde cada factor es negativo o positivo (porque el signo de un producto depende del signo de los factores). Los detalles se explican en el Ejemplo 3, en el que usamos la guía siguiente.

GUÍA PARA RESOLVER DESIGUALDADES NO LINEALES

1. **Pase todos los términos a un lado.** Si es necesario, reescriba la desigualdad de modo que todos los términos diferentes de cero aparezcan en un lado del signo de desigualdad. Si el lado diferente de cero de la desigualdad contiene cocientes, páselos a un común denominador.
2. **Factorice.** Factorice el lado diferente de cero de la desigualdad.
3. **Encuentre los intervalos.** Determine los valores para los cuales cada factor es cero. Estos números dividirán la recta real en intervalos. Haga una lista de los intervalos que están determinados por estos números.
4. **Haga una tabla o diagrama.** Use valores de prueba para hacer una tabla o diagrama de los signos de cada factor en cada intervalo. En el último renglón de la tabla determine el signo del producto (o cociente) de estos factores.
5. **Resuelva.** Determine la solución de la desigualdad a partir del último renglón de la tabla de signos. Asegúrese de verificar si la desigualdad queda satisfecha por algunos o todos los puntos extremos de los intervalos. (Esto puede ocurrir si la desigualdad contiene $\leq$ o $\geq$.

La técnica de factorización que se describe en esta guía funciona sólo si todos los términos diferentes de cero aparecen en un lado del símbolo de desigualdad. Si la desigualdad no se escribe en esta forma, primero la reescribimos, como se indica en el Paso 1.

EJEMPLO 3 | Resolver una desigualdad cuadrática

Resuelva la desigualdad $x^2 \leq 5x - 6$.

SOLUCIÓN Seguiremos la guía dada líneas antes.

Pase todos los términos a un lado. Pasamos todos los términos al lado izquierdo.

$$x^2 \leq 5x - 6 \qquad \text{Desigualdad dada}$$

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0 \qquad \text{Reste } 5x\text{, sume } 6$$

Factorice. Factorizando el lado izquierdo de la desigualdad, obtenemos

$$(x - 2)(x - 3) \leq 0 \qquad \text{Factorice}$$

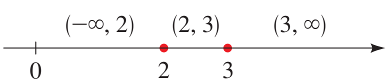


FIGURA 3

Encuentre los intervalos. Los factores del lado izquierdo son $x - 2$ y $x - 3$. Estos factores son cero cuando x es 2 y 3, respectivamente. Como se ve en la Figura 3, los números 2 y 3 dividen la recta real en los tres intervalos

$$(-\infty, 2), (2, 3), (3, \infty)$$

Los factores $x - 2$ y $x - 3$ cambian de signo sólo en 2 y 3, respectivamente. Por lo tanto, estos factores mantienen su signo en cada uno de estos tres intervalos.

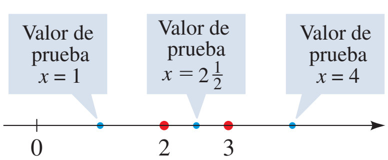


FIGURA 4

Haga una tabla o diagrama. Para determinar el signo de cada factor en cada uno de los intervalos que encontramos, usamos **valores de prueba.** Escogemos un número dentro de cada intervalo y comprobamos el signo de los factores $x - 2$ y $x - 3$ en el número que escojamos. Para el intervalo $(-\infty, 2)$, escojamos el valor de prueba 1 (vea Figura 4). Sustituyendo 1 por x en los factores $x - 2$ y $x - 3$, obtenemos

$$x - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$$

$$x - 3 = 1 - 3 = -2 < 0$$

Por lo tanto ambos factores son negativos en este intervalo. Nótese que necesitamos verificar sólo un valor de prueba por cada intervalo porque los factores $x - 2$ y $x - 3$ no cambian signo en ninguno de los tres intervalos que encontramos.

Usando los valores de prueba $x = 2\frac{1}{2}$ y $x = 4$ para los intervalos $(2, 3)$ y $(3, \infty)$ (vea Figura 4), respectivamente, construimos la siguiente tabla de signos. El renglón final de la tabla se obtiene del dato que la expresión del último renglón es el producto de los dos factores.

Intervalo	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de $x - 2$	$-$	$+$	$+$
Signo de $x - 3$	$-$	$-$	$+$
Signo de $(x - 2)(x - 3)$	$+$	$-$	$+$

Si el lector así lo prefiere, puede representar esta información en una recta real, como en el siguiente diagrama de signos. Las rectas verticales indican los puntos en los que la recta real está dividida en intervalos:

		2		3	
Signo de $x - 2$	$-$		$+$		$+$
Signo de $x - 3$	$-$		$-$		$+$
Signo de $(x - 2)(x - 3)$	$+$		$-$		$+$

Resuelva. Leemos de la tabla o el diagrama que $(x - 2)(x - 3)$ es negativo en el intervalo $(2, 3)$. Entonces, la solución de la desigualdad $(x - 2)(x - 3) \le 0$ es

$$\{x \mid 2 \le x \le 3\} = [2, 3]$$

Hemos incluido los puntos extremos 2 y 3 porque buscamos valores de x tales que el producto es menor o *igual a* cero. La solución está ilustrada en la Figura 5.

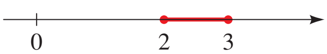


FIGURA 5

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41**

EJEMPLO 4 | Resolver una desigualdad con factores repetidos

Resuelva la desigualdad $x(x - 1)^2(x - 3) < 0$.

SOLUCIÓN Todos los términos diferentes de cero ya están en un lado de la desigualdad, y el lado diferente de cero de la desigualdad ya está factorizado. Por lo tanto, empezamos por hallar los intervalos para esta desigualdad.

Encuentre los intervalos. Los factores del lado izquierdo son x, $(x - 1)^2$ y $x - 3$. Éstos son cero cuando $x = 0, 1, 3$. Estos números dividen la recta real en los intervalos

$$(-\infty, 0), (0, 1), (1, 3), (3, \infty)$$

Haga un diagrama. Hacemos el siguiente diagrama, usando puntos de prueba para determinar el signo de cada factor en cada intervalo.

		0		1		3	
Signo de x	$-$		$+$		$+$		$+$
Signo de $(x - 1)^2$	$+$		$+$		$+$		$+$
Signo de $(x - 3)$	$-$		$-$		$-$		$+$
Signo de $x(x - 1)^2(x - 3)$	$+$		$-$		$-$		$+$

Resuelva. Del diagrama vemos que $x(x-1)^2(x-3) < 0$ para x en el intervalo $(0, 1)$ o para x en $(1, 3)$. Por lo tanto, el conjunto solución es la unión de estos dos intervalos:

$$(0, 1) \cup (1, 3)$$

El conjunto solución está graficado en la Figura 6.

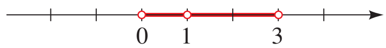


FIGURA 6

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **53**

EJEMPLO 5 | Resolver una desigualdad con un cociente

Resuelva la desigualdad $\dfrac{1+x}{1-x} \geq 1$

SOLUCIÓN

Pase todos los términos a un lado. Movemos los términos al lado izquierdo y simplificamos usando un denominador común.

$$\frac{1+x}{1-x} \geq 1 \qquad \text{Desigualdad dada}$$

$$\frac{1+x}{1-x} - 1 \geq 0 \qquad \text{Reste 1}$$

$$\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} \geq 0 \qquad \text{Denominador común } 1-x$$

$$\frac{1+x-1+x}{1-x} \geq 0 \qquad \text{Combine las fracciones}$$

$$\frac{2x}{1-x} \geq 0 \qquad \text{Simplifique}$$

Es tentador simplemente multiplicar ambos lados de la desigualdad por $1-x$ (como se haría si fuera una *ecuación*.) Pero esto no funciona porque no sabemos si $1-x$ es positivo o negativo, de modo que no podemos decir si la desigualdad necesita ser invertida. (Vea Ejercicio 123.)

Encuentre los intervalos. Los factores del lado izquierdo son $2x$ y $1-x$. Éstos son cero cuando x es 0 y 1. Estos números dividen la recta real en los intervalos

$$(-\infty, 0), (0, 1), (1, \infty)$$

Haga un diagrama. Hacemos el siguiente diagrama usando puntos de prueba para determinar el signo de cada factor en cada intervalo.

		0		1	
Signo de $2x$	$-$		$+$		$+$
Signo de $1-x$	$+$		$+$		$-$
Signo de $\dfrac{2x}{1-x}$	$-$		$+$		$-$

Resuelva. Del diagrama vemos que $\dfrac{2x}{1-x} \geq 0$ para x en el intervalo $[0, 1)$. Incluimos el punto extremo 0 porque la desigualdad original requiere que el cociente sea mayor *o igual a* 1. No obstante, no incluimos el otro punto extremo 1 porque el cociente de la desigualdad no está definido en 1. Por lo tanto, el conjunto solución es el intervalo

$$[0, 1)$$

El conjunto solución está graficado en la Figura 7.

FIGURA 7

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59**

El Ejemplo 5 muestra que siempre debemos comprobar los puntos extremos del conjunto solución para ver si satisfacen la desigualdad original.

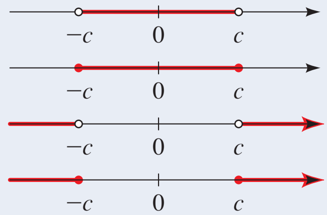
Desigualdades con valor absoluto

Usamos las siguientes propiedades para resolver desigualdades que contienen valor absoluto.

Estas propiedades se cumplen cuando x es sustituida por cualquier expresión algebraica. (En la figura supusimos que $c > 0$.)

PROPIEDADES DE DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO

Desigualdad	Forma equivalente	Gráfica
1. $\lvert x \rvert < c$	$-c < x < c$	
2. $\lvert x \rvert \le c$	$-c \le x \le c$	
3. $\lvert x \rvert > c$	$x < -c$ o $c < x$	
4. $\lvert x \rvert \ge c$	$x \le -c$ o $c \le x$	



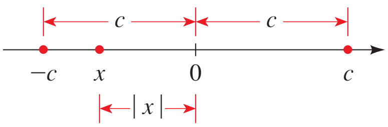


FIGURA 8

Estas propiedades se pueden demostrar con el uso de la definición de valor absoluto. Para demostrar la Propiedad 1, por ejemplo, observe que la desigualdad $\lvert x \rvert < c$ dice que la distancia de x a 0 es menor que c, y de la Figura 8 vemos que esto es verdadero si y sólo si x está entre $-c$ y c.

EJEMPLO 6 | Resolver una desigualdad con valor absoluto

Resuelva la desigualdad $\lvert x - 5 \rvert < 2$.

SOLUCIÓN 1 La desigualdad $\lvert x - 5 \rvert < 2$ es equivalente a

$$-2 < x - 5 < 2 \qquad \text{Propiedad 1}$$

$$3 < x < 7 \qquad \text{Sume 5}$$

El conjunto solución es el intervalo abierto (3, 7).

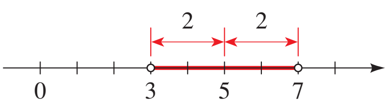


FIGURA 9

SOLUCIÓN 2 Geométricamente, el conjunto solución está formado por todos los números x cuya distancia desde 5 es menor a 2. De la Figura 9 vemos que éste es el intervalo (3, 7).

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **79**

EJEMPLO 7 | Resolver una desigualdad con valor absoluto

Resuelva la desigualdad $\lvert 3x + 2 \rvert \ge 4$.

SOLUCIÓN Por la Propiedad 4, la desigualdad $\lvert 3x + 2 \rvert \ge 4$ es equivalente a

$$3x + 2 \ge 4 \quad \text{o} \quad 3x + 2 \le -4$$

$$3x \ge 2 \qquad\qquad 3x \le -6 \qquad \text{Reste 2}$$

$$x \ge \tfrac{2}{3} \qquad\qquad x \le -2 \qquad \text{Divida entre 3}$$

Entonces el conjunto solución es

$$\{x \mid x \le -2 \quad \text{o} \quad x \ge \tfrac{2}{3}\} = (-\infty, -2] \cup [\tfrac{2}{3}, \infty)$$

El conjunto está graficado en la Figura 10.

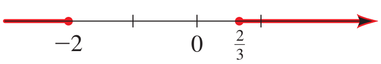


FIGURA 10

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **83**

Modelado con desigualdades

Modelar problemas prácticos lleva a desigualdades porque con frecuencia estamos interesados en determinar cuándo una cantidad es mayor (o menor) que otra.

EJEMPLO 8 | Boletos para carnaval

Un carnaval tiene dos planes para boletos

Plan A: Cuota de \$5 la entrada y \$0.25 cada juego mecánico

Plan B: Cuota de \$2 la entrada y \$0.50 cada juego mecánico

¿Cuántos juegos mecánicos tendría que tomar para que el Plan A sea menos costoso que el Plan B?

SOLUCIÓN Identifique la variable. Nos piden el número de viajes en juego mecánico para el cual es menos costoso que el Plan B. Por lo tanto, hacemos

$$x = \text{número de viajes en juego mecánico}$$

Convierta las palabras en álgebra. La información del problema puede organizarse como sigue.

En palabras	En álgebra
Número de viajes	x
Costo con Plan A	$5 + 0.25x$
Costo con plan B	$2 + 0.50x$

Formule el modelo. A continuación formulamos el modelo.

$$\boxed{\text{costo con Plan A}} < \boxed{\text{costo con Plan B}}$$

$$5 + 0.25x < 2 + 0.50x$$

Resuelva. A continuación despejamos x.

$$3 + 0.25x < 0.50x \qquad \text{Reste 2}$$

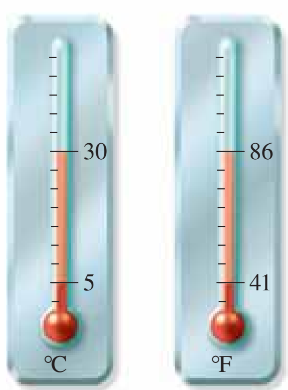
$$3 < 0.25x \qquad \text{Reste } 0.25x$$

$$12 < x \qquad \text{Divida entre } 0.25$$

Entonces, si usted piensa tomar *más de* 12 viajes, el Plan A es menos costoso.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **107**

EJEMPLO 9 | Relación entre escalas Fahrenheit y Celsius



Las instrucciones en una botella de medicina indican que la botella debe conservarse a una temperatura entre 5°C y 30°C. ¿Qué intervalo de temperaturas corresponde en una escala Fahrenheit?

SOLUCIÓN La relación entre grados Celsius (C) y grados Fahrenheit (F) está dada por la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Expresando el enunciado de la botella en términos de desigualdades, tenemos

$$5 < C < 30$$

Entonces las temperaturas Fahrenheit correspondientes satisfacen las desigualdades

$$5 < \tfrac{5}{9}(F - 32) < 30 \qquad \text{Sustituya } C = \tfrac{5}{9}(F - 32)$$

$$\tfrac{9}{5} \cdot 5 < F - 32 < \tfrac{9}{5} \cdot 30 \qquad \text{Multiplique por } \tfrac{9}{5}$$

$$9 < F - 32 < 54 \qquad \text{Simplifique}$$

$$9 + 32 < F < 54 + 32 \qquad \text{Sume 32}$$

$$41 < F < 86 \qquad \text{Simplifique}$$

La medicina debe conservarse a una temperatura entre 41°F y 86°F.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **105**

1.7 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Llene el espacio en blanco con un signo de desigualdad apropiado.
   (a) Si $x < 5$, entonces $x - 3$ ____ 2.
   (b) Si $x \le 5$, entonces $3x$ ____ 15.
   (c) Si $x \ge 2$, entonces $-3x$ ____ -6.
   (d) Si $x < -2$, entonces $-x$ ____ 2.
2. *¿Verdadero o falso?*
   (a) Si $x(x + 1) > 0$, entonces x y $x + 1$ son ambos positivos o ambos negativos.
   (b) Si $x(x + 1) > 5$, entonces x y $x + 1$ son cada uno mayores a 5.
3. (a) La solución de la desigualdad $|x| \le 3$ es el intervalo _______.
   (b) La solución de la desigualdad $|x| \ge 3$ es una unión de dos intervalos ____ $\cup$ _____.
4. (a) El conjunto de todos los puntos sobre la recta real cuya distancia desde cero es menor a 3 puede ser descrito por la desigualdad de valor absoluto $|x|$_______.
   (b) El conjunto de todos los puntos sobre la recta real cuya distancia desde cero es mayor a 3 puede ser descrito por la desigualdad de valor absoluto $|x|$_______.

HABILIDADES

5–10 ■ Sea $S = \{-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2, 4\}$. Determine cuáles elementos de S satisfacen la desigualdad.

5. $3 - 2x \le \frac{1}{2}$
6. $2x - 1 \ge x$
7. $1 < 2x - 4 \le 7$
8. $-2 \le 3 - x < 2$
9. $\dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{2}$
10. $x^2 + 2 < 4$

11–34 ■ Resuelva la desigualdad lineal. Exprese la solución usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

11. $2x \le 7$
12. $-4x \ge 10$
13. $2x - 5 > 3$
14. $3x + 11 < 5$
15. $7 - x \ge 5$
16. $5 - 3x \le -16$
17. $2x + 1 < 0$
18. $0 < 5 - 2x$
19. $3x + 11 \le 6x + 8$
20. $6 - x \ge 2x + 9$
21. $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} > 2$
22. $\frac{2}{5}x + 1 < \frac{1}{5} - 2x$
23. $\frac{1}{3}x + 2 < \frac{1}{6}x - 1$
24. $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x \ge \frac{1}{6} + x$
25. $4 - 3x \le -(1 + 8x)$
26. $2(7x - 3) \le 12x + 16$
27. $2 \le x + 5 < 4$
28. $5 \le 3x - 4 \le 14$
29. $-1 < 2x - 5 < 7$
30. $1 < 3x + 4 \le 16$
31. $-2 < 8 - 2x \le -1$
32. $-3 \le 3x + 7 \le \frac{1}{2}$
33. $\dfrac{1}{6} < \dfrac{2x - 13}{12} \le \dfrac{2}{3}$
34. $-\dfrac{1}{2} \le \dfrac{4 - 3x}{5} \le \dfrac{1}{4}$

35–72 ■ Resuelva la desigualdad no lineal. Exprese la solución usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

35. $(x + 2)(x - 3) < 0$
36. $(x - 5)(x + 4) \ge 0$
37. $x(2x + 7) \ge 0$
38. $x(2 - 3x) \le 0$
39. $x^2 - 3x - 18 \le 0$
40. $x^2 + 5x + 6 > 0$
41. $2x^2 + x \ge 1$
42. $x^2 < x + 2$
43. $3x^2 - 3x < 2x^2 + 4$
44. $5x^2 + 3x \ge 3x^2 + 2$
45. $x^2 > 3(x + 6)$
46. $x^2 + 2x > 3$
47. $x^2 < 4$
48. $x^2 \ge 9$
49. $(x + 2)(x - 1)(x - 3) \le 0$
50. $(x - 5)(x - 2)(x + 1) > 0$
51. $(x - 4)(x + 2)^2 < 0$
52. $(x + 3)^2(x + 1) > 0$
53. $(x - 2)^2(x - 3)(x + 1) \le 0$
54. $x^2(x^2 - 1) \ge 0$
55. $x^3 - 4x > 0$
56. $16x \le x^3$
57. $\dfrac{x - 3}{x + 1} \ge 0$
58. $\dfrac{2x + 6}{x - 2} < 0$
59. $\dfrac{4x}{2x + 3} > 2$
60. $-2 < \dfrac{x + 1}{x - 3}$
61. $\dfrac{2x + 1}{x - 5} \le 3$
62. $\dfrac{3 + x}{3 - x} \ge 1$
63. $\dfrac{4}{x} < x$
64. $\dfrac{x}{x + 1} > 3x$
65. $1 + \dfrac{2}{x + 1} \le \dfrac{2}{x}$
66. $\dfrac{3}{x - 1} - \dfrac{4}{x} \ge 1$
67. $\dfrac{6}{x - 1} - \dfrac{6}{x} \ge 1$
68. $\dfrac{x}{2} \ge \dfrac{5}{x + 1} + 4$
69. $\dfrac{x + 2}{x + 3} < \dfrac{x - 1}{x - 2}$
70. $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x + 2} \le 0$
71. $x^4 > x^2$
72. $x^5 > x^2$

73–88 ■ Resuelva la desigualdad con valor absoluto. Exprese la respuesta usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

73. $|x| \le 4$
74. $|3x| < 15$
75. $|2x| > 7$
76. $\frac{1}{2}|x| \ge 1$
77. $|x - 5| \le 3$
78. $|x + 1| \ge 1$
79. $|2x - 3| \le 0.4$
80. $|5x - 2| < 6$
81. $|3x - 2| \ge 5$
82. $|8x + 3| > 12$
83. $\left|\dfrac{x - 2}{3}\right| < 2$
84. $\left|\dfrac{x + 1}{2}\right| \ge 4$
85. $|x + 6| < 0.001$
86. $3 - |2x + 4| \le 1$
87. $8 - |2x - 1| \ge 6$
88. $7|x + 2| + 5 > 4$

88–92 ■ Se da una frase que describe un conjunto de números reales. Exprese la frase como una desigualdad que contenga un valor absoluto.

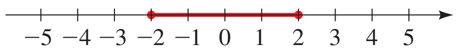
89. Todos los números reales x menos 3 unidades desde 0

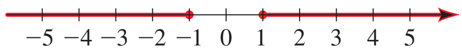
90. Todos los números reales x más 2 unidades desde 0

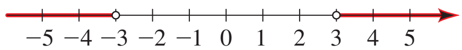
91. Todos los números reales x menos 5 unidades desde 7

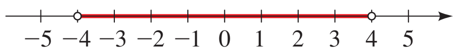
92. Todos los números reales x como máximo 4 desde 2

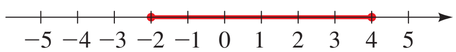
93–98 ■ Se grafica un conjunto de números reales. Encuentre una desigualdad que contenga un valor absoluto que describa el conjunto.

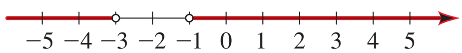
93. 

94. 

95. 

96. 

97. 

98. 

99–102 ■ Determine los valores de la variable para la cual la expresión está definida como número real.

99. $\sqrt{16 - 9x^2}$ **100.** $\sqrt{3x^2 - 5x + 2}$

101. $\left(\dfrac{1}{x^2 - 5x - 14}\right)^{1/2}$ **102.** $\sqrt[4]{\dfrac{1 - x}{2 + x}}$

103. De la desigualdad despeje x, suponiendo que a, b y c son constantes positivas.

(a) $a(bx - c) \geq bc$ **(b)** $a \leq bx + c < 2a$

104. Suponga que a, b, c y d son números positivos tales que

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Demuestre que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a + c}{b + d} < \dfrac{c}{d}$.

APLICACIONES

105. Escalas de temperatura Use la relación entre C y F dada en el Ejemplo 9 para hallar el intervalo en la escala Fahrenheit correspondiente al intervalo de temperatura $20 \leq C \leq 30$.

106. Escalas de temperatura ¿Cuál intervalo en la escala Celsius corresponde al intervalo de temperatura $50 \leq F \leq 95$?

107. Costo de renta de un auto Una compañía de renta de autos ofrece dos planes para renta de un auto.

Plan A: $30 por día y $0.10 por milla

Plan B: $50 por día con kilometraje ilimitado

108. Costo de llamadas de larga distancia Una compañía telefónica ofrece dos planes de llamadas de larga distancia.

Plan A: $25 por mes y $0.05 por minuto

Plan B: $5 por mes y $0.12 por minuto

¿Para cuántos minutos de llamadas de larga distancia sería financieramente ventajoso el Plan B?

109. Costo de manejar un auto Se estima que el costo anual de manejar cierto auto nuevo está dado por la fórmula

$$C = 0.35m + 2200$$

donde m representa el número de millas recorridas por año y C es el costo en dólares. Juana compró ese auto y decide presupuestar entre $6400 y $7100 para costos de manejo del año siguiente. ¿Cuál es el intervalo correspondiente de millas que ella puede manejar su nuevo auto?

110. Temperatura del aire Cuando el aire asciende, se dilata y, al dilatarse, se enfría a razón de alrededor de 1°C por cada 100 metros de ascenso hasta unos 12 km.

(a) Si la temperatura del suelo es de 20°C, escriba una fórmula para la temperatura a una altura h.

(b) ¿Qué intervalo de temperaturas se puede esperar si un avión despega y alcanza una altitud máxima de 5 km?

111. Precio de boleto en una aerolínea Una aerolínea que hace vuelos especiales encuentra que, en sus vuelos de sábados de Filadelfia a Londres, los 120 asientos se venderán si el precio es de $200. No obstante, por cada aumento de $3 en el precio del boleto, el número de asientos disminuye en uno.

(a) Encuentre una fórmula para el número de asientos vendidos si el precio del boleto es de P dólares.

(b) Durante cierto período, el número de asientos vendidos para este vuelo variaban entre 90 y 115. ¿Cuál era la variación correspondiente de precios de boletos?

112. Precisión de una báscula Un comerciante de café vende a un cliente 3 lb de café Hawaiian Kona a $6.50 por libra. La báscula del comerciante es precisa con variación no mayor de ±0.03 lb. ¿Cuánto podría habérsele cobrado de más o de menos al cliente por la posible imprecisión de la báscula?

113. Gravedad La fuerza gravitacional F ejercida por la Tierra sobre un cuerpo que tiene una masa de 100 kg está dada por la ecuación

$$F = \frac{4{,}000{,}000}{d^2}$$

donde d es la distancia (en km) del objeto desde el centro de la Tierra, y la fuerza F se mide en newtons (N). ¿Para qué distancias será entre 0.0004 N y 0.01 N la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre este cuerpo?

114. Temperatura de una fogata En la cercanía de una fogata, la temperatura T en °C a una distancia de x metros del centro de la fogata está dada por

$$T = \frac{600{,}000}{x^2 + 300}$$

¿A qué intervalo de distancias desde el centro de la fogata era la temperatura menor a 500°C?